Prof. Dr. Andreas Knorr,
Alexander Carmele, Stefan Fruhner, Ken Lichtner, Helge Neitsch, Andrea Vüllings,
Sarah Loos, Anke Zimmermann

2. Übungsblatt – Mathematische Methoden in der Physik

Abgabe: Mo. 07.05.2012 bis 10:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.

Aufgabe 5 (5 Punkte): *Potenzreihenansatz*

Funktionen $f(x)$ lassen sich nach der Basis $\{\varphi_n(x) = x^n\}$ in eine *Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

entwickeln. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = 1/(1-x)$ in eine Potenzreihe (sog. *geometrische Reihe*) und zeigen Sie, dass für die Koeffizienten $c_n = 1 \;\forall\; n$ gilt. Verwenden Sie hierzu die in der Vorlesung gegebenene Differentialgleichung für $f(x)$.

Aufgabe 6 (10 Punkte): *Taylorreihen und Taylorpolynome*
Funktionen $f(x)$ lassen sich nach der Basis $\{1, (x-x_0), (x-x_0)^2, \dots\}$ in eine *Taylorreihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

mit den Koeffizienten a_k um den Punkt x_0 entwickeln.

(a) Wiederholen Sie die Ableitung der Taylorreihe in der Vorlesung und machen Sie sich klar, dass die Koeffizienten a_k durch den Ausdruck

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

gegeben sind, wobei $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung an der Stelle $x = x_0$ ist.
Hinweis: Berechnen Sie $f^{(k)}(x_0)$ und vergleichen Sie mit Formel (1).

(b) Berechnen Sie das *Taylorpolynom n-ten Grades* $f_n(x)$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

von $f(x) = 1/\sqrt{1 \pm x^2}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur Ordnung $n = 2$.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3-ten Grades von $f(x) = e^x \sin x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi/2$.

(d) Bei einem Ferromagneten kann die Magnetisierung M ohne externes Magnetfeld B für Temperaturen $T < T_C$ erhalten bleiben. Die Ursache dafür ist die Spin-Spin-Wechselwirkung der Elektronen im Ferromagneten, welche ein internes Magnetfeld αM ($\alpha > 0$) aufrecht erhält. Die Magnetisierung M kann bei vorgegebenen externen Magnetfeld B durch die folgende Selbstkonsistenzgleichung berechnet werden.

$$arctanh\left(\frac{M}{\mu_B \mu_0}\right) = \frac{\mu_B}{k_B T}(B + \alpha M) \tag{2}$$

Hier ist μ_B die magnetische Suszeptibilität, μ_0 die magnetische Feldkonstante, k_B ist die Boltzmann-Konstante und T ist die Temperatur. Entwickeln Sie die linke Seite der Gleichung (2) für kleine M und bringen Sie die resultierende Gleichung in die Form:

$$B = aM + bM^3.$$

Ermitteln Sie die Koeffizienten a und b. Bringt man den Koeffizienten a in die Form

$$a = \alpha\left(\frac{T}{T_C} - 1\right),$$

so kann man die kritische Temperatur T_C ablesen. Geben Sie T_C an. Stellen Sie nun qualitativ B in Abhängigkeit von M für die zwei Fälle (i) $T < T_C$ und (ii) $T > T_C$ graphisch dar. Geben Sie für den Fall (i) und $B = 0$ die Lösungen für die Magnetisierung M an und stellen Sie fest, dass $M \neq 0$ möglich ist.

Aufgabe 7 (5 Punkte): *Uneigentliche Integrale*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_1^\infty \frac{2x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx,$$

(b)

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Anmerkung: Es ist e die Eulersche Zahl.

Vorlesung: Do um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien: Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Aktive Teilnahme am Tutorium mit Anwesenheitskontrolle (max. darf zweimal im zugewiesenen Tutorium unentschuldigt gefehlt werden).
Bestandene Klausur.

Literatur zur Lehrveranstaltung:
Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift : das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- May-Britt Kallenrode: Rechenmethoden der Physik - Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Andreas Knorr	Di	13:00–13:40 Uhr	EW 742	24255
Alexander Carmele	Mo	13:00–14:00 Uhr	EW 703	23764
Stefan Fruhner	Fr	13:30–14:30 Uhr	EW 627/28	27681
Ken Lichtner	Di	10:00–11:00 Uhr	EW 266	28849
Helge Neitsch	Mi	11:00–12:00 Uhr	EW 269	28852
Andrea Vüllings	Do	16:30–17:30 Uhr	EW 632	22088
Anke Zimmermann	Do	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143
Sarah Loos	Di	14:00–15:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
`http://www.tu-berlin.de/?id=116153`.