Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

4. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Mi. 16.05.2012 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 7 (15 Punkte): *Stochastische Resonanz*

Ausgehend von der Langevin-Gleichung für ein überdämpftes Brown'sches Teilchen in einem bistabilen Potential und periodischer äußerer Anregung

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\tilde{x}\left(\tilde{t}\right) &= a\tilde{x}\left(\tilde{t}\right) - b\tilde{x}\left(\tilde{t}\right)^3 + \tilde{A}_0\cos\left(\tilde{\omega}\tilde{t}\right) + \tilde{\sigma}\tilde{\zeta}\left(\tilde{t}\right), \\ \left\langle\tilde{\zeta}\left(\tilde{t}\right)\right\rangle &= 0, \\ \left\langle\tilde{\zeta}\left(\tilde{t}\right)\tilde{\zeta}\left(\tilde{t}+\tilde{\tau}\right)\right\rangle &= \delta\left(\tilde{\tau}\right)\end{aligned}$$

soll die stochastische Resonanz mithilfe des Zwei-Zustandsmodells untersucht werden.
Zeige zuerst, daß die Langevin-Gleichung auf die einfachere Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right) = x\left(t\right) - x\left(t\right)^3 + A_0\cos\left(\omega t\right) + \sigma\zeta\left(t\right), \tag{1}$$

$$\left\langle\zeta\left(t\right)\right\rangle = 0, \tag{2}$$

$$\left\langle\zeta\left(t\right)\zeta\left(t+\tau\right)\right\rangle = \delta\left(\tau\right) \tag{3}$$

durch Reskalierung aller Größen gebracht werden kann.
Mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung kann für eine beliebige Potentialschwelle die Kramersche Übergangsrate ($D = \frac{1}{2}\sigma^2$)

$$r_K = \frac{1}{2\pi}\sqrt{V''\left(x_{\mathsf{min}}\right)\left|V''\left(x_{\mathsf{max}}\right)\right|}\exp\left(-\left(V\left(x_{\mathsf{max}}\right) - V\left(x_{\mathsf{min}}\right)\right)/D\right) \tag{4}$$

abgeleitet werden, wobei $x_{\mathsf{min}}(x_{\mathsf{max}})$ die Position der Potentialminima (Potentialmaxima) von $V\left(x\right)$ ist. Berechne r_K für den Fall des zeitunabhängigen bistabilen Potentials V

$$V\left(x\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

und bezeichne diese Rate mit r_K^0.
Statt der Fokker-Planck-Gleichung soll jetzt das Zwei-Zustandsmodell benutzt werden. Sei $n_\pm\left(t\right)$ die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit t im Zustand $x\left(t\right) = \pm x_{\mathsf{min}}$ anzutreffen. Der Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P\left(x,t\right)$ der Fokker-Planck-Gleichung ist gegeben durch

$$P\left(x,t\right) = n_+\left(t\right)\delta\left(x - x_{\mathsf{min}}\right) + n_-\left(t\right)\delta\left(x + x_{\mathsf{min}}\right).$$

Die Zeitentwicklung von $n_\pm$ ist gegeben durch die Mastergleichung

$$\dot{n}_\pm = -W_\mp\left(t\right)n_\pm + W_\pm\left(t\right)n_\mp \tag{5}$$

mit zeitabhängigen Übergangsraten

$$W_\pm\left(t\right) = r_K^0\exp\left(\pm\frac{A_0}{D}\cos\left(\Omega t\right)\right). \tag{6}$$

Zeige, wie man unter Verwendung von A_0 als kleinen Parameter vom allgemeinen Ausdruck für die Kramersche Rate Gl. (4) zu Gl. (6) kommt.

Berechne nun mithilfe der Mastergleichung Gl. (5) $n_+(t)$ mit der Anfangsbedingung $n_+(t_0) = 1$ bis zur ersten Ordnung im kleinen Parameter A_0. Benutze $n_+(t) + n_-(t) = 1$.
Ermittle den zeitabhängigen Mittelwert

$$\bar{x}(t, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t)\,\mathrm{d}x$$

und zeige, daß der Langzeitlimes

$$\bar{x}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \bar{x}(t, t_0)$$

ausgedrückt werden kann als

$$\bar{x}(t) = \hat{x}(D)\cos\left(\Omega t - \hat{\phi}(D)\right)$$

mit Amplitude

$$\hat{x}(D) = \frac{2A_0 r_K^0}{D\sqrt{\left(2r_K^0\right)^2 + \Omega^2}}$$

und Phasenverschiebung

$$\hat{\phi}(D) = \arctan\left(\frac{\Omega}{2r_K^0}\right).$$

Betrachte jetzt den Resonanzfall: für welche Relation $\Omega(D)$ hat die Amplitude $\hat{x}(D)$ ein Maximum?
Verstärkung (d.h. $\hat{x}(D)/A_0 > 1$ im Resonanzfall) ist nur möglich für ein Intervall von Frequenzen $\Omega \in (-\Omega_{\mathsf{max}}, \Omega_{\mathsf{max}})$. Wie groß ist Ω_{max}?
Dein Ergebnis kannst du mit dem Mathematica Notebook zur Stochastischen Resonanz (auf der Webseite zur Lehrveranstaltung) mit numerischen Simulationen der Langevin-Gleichung vergleichen.

Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

Vorlesung:

Mi um 12:00 Uhr – 14:00 Uhr in ER 164,
Do um 14:00 Uhr – 16:00 Uhr in EW 202.

Scheinkriterien:

Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- L. Arnold: Stochastische Differentialgleichungen
- C. W. Gardiner: Handbook of Stochastic Methods
- H. Haken: Synergetics. Introduction and Advanced Topics
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions
- J. L. Klimontovich: Statistical Physics
- A. S. Mikhailov: Foundations of Synergetics I
- R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Harald Engel	Mi	14:30–16:00 Uhr	EW 738	79462
Jakob Löber	Mo	14:30–16:00 Uhr	EW 737	23001

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss12