Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

6. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Mi. 6.06.2012 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 10 (25 Punkte): *Farbiges Rauschen*

Die stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung soll störungstheoretisch für farbiges Rauschen gelöst werden. $0 < \epsilon \ll 1$ dient dabei als Störungsparameter und es gilt $\tau_{\text{corr}} = \epsilon^2$, wobei τ_{corr} die Korrelationszeit des farbigen Rauschens ist. Wir gehen aus von der Langevin-Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = f(x(t)) + \frac{g(x(t))}{\epsilon} z(t),$$

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = -\frac{1}{\epsilon^2} z(t) + \frac{\sigma}{\epsilon}\zeta(t),$$

$$(3) \qquad \langle \zeta(t) \rangle = 0,\, x \in [b_1, b_2],\ \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau)\rangle = \delta(\tau),\ z(0) = z_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2/2\right).$$

Zeige zuerst, daß die stationäre Lösung $p_s(z)$ der Fokker-Planck für Gl. (2) allein

$$p_s(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{\sigma^2}}$$

ist. Leite dann die Fokker-Planck-Gleichung für beide Langevin-Gleichungen Gl. (1) und Gl. (2)

$$\partial_t p^\epsilon(x,z,t) = \left(\frac{1}{\epsilon^2}\hat{F}_1 + \frac{1}{\epsilon}\hat{F}_2 + \hat{F}_3\right) p^\epsilon(x,z,t),$$

$$\hat{F}_1 = \partial_z z + \partial_z^2 \frac{\sigma^2}{2},\ \hat{F}_2 = -z\partial_x g(x),\ \hat{F}_3 = -\partial_x f(x)$$

her. Benutze den Ansatz

$$p_s^\epsilon(x,z) = p_0(x,z) + \epsilon p_1(x,z) + \epsilon^2 p_2(x,z) + \dots$$

für die Störungsentwicklung der stationären Lösung $p_s^\epsilon(x,z)$. Die Normierungsbedingung für die p_k lautet

$$(4) \qquad \int_{b_1}^{b_2} \mathrm{d}x\, p_k(x,z) = \delta_{0,k},\ k = 0,1,2,\dots.$$

Leite für die $k-$te Ordnung von ϵ folgende Gleichungen ab ($\hat{F}_k^+$ ist der zu $\hat{F}_k$ adjungierte Operator bzgl. des Standardskalarprodukts):

$$r_0(x,z) = r_0(x),\ p_k(x,z) = p_s(z)\, r_k(x,z),$$

$$\mathcal{O}\left(\epsilon^{-2}\right) : \hat{F}_1^+ r_0(x) = 0,$$

$$\mathcal{O}\left(\epsilon^{-1}\right) : \hat{F}_1^+ r_1(x,z) = -\hat{F}_2 r_0(x,z),$$

$$\mathcal{O}\left(\epsilon^{k-2}\right) : \hat{F}_1^+ r_k(x,z) = -\hat{F}_2 r_{k-1}(x,z) - \hat{F}_3 r_{k-2}(x,z),\ k > 1.$$

6. Übung TPVI SS12

Leite die Fredholm-Alternativen

$$\mathcal{O}\left(\epsilon^{-1}\right) : \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z p_s\left(z\right) \hat{F}_2 r_0\left(x,z\right) = 0,$$

$$\mathcal{O}\left(\epsilon^{k-2}\right) : \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z p_s\left(z\right) \left(\hat{F}_2 r_{k-1}\left(x,z\right) + \hat{F}_3 r_{k-2}\left(x,z\right)\right) = 0,\ k > 1$$

ab.
Löse nun die homogene Gleichung $\hat{F}_1^+ r_{k,\mathsf{hom}}\left(x,z\right) = 0$. Warum kommt nur $r_{k,\mathsf{hom}}\left(x,z\right) = c_k\left(x\right)$ unabhängig von z in Betracht?
Jetzt muss die partikuläre Lösung $r_{k,\mathsf{inh}}\left(x,z\right)$ bestimmt werden. Nimm dazu an, daß sich die inhomogene Gleichung in der Form

$$\hat{F}_1^+ r_k\left(x,z\right) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n = g\left(z\right),\ b_n = b_n\left(x\right)$$

schreiben läßt und leite mit dem Ansatz

$$r_{k,\mathsf{inh}}\left(x,z\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n,\ a_n = a_n\left(x\right)$$

die Relation zwischen den Koeffizienten

$$b_n = \left(\frac{\sigma^2}{2} a_{n+2}\left(n+2\right)\left(n+1\right) - a_n n\right)$$

her. Diese Relation kann rekursiv für die Koeffizienten $a_n\left(x\right)$ gelöst werden. Damit ist die z-Abhängigkeit der Lösungen

$$r_k\left(x,z\right) = c_k\left(x\right) + \sum_{n=1}^{N} a_n z^n$$

bestimmt (der Koeffizient a_0 kann in die noch unbekannte Funktion c_k geschoben werden). Bestimme die allgemeinen Lösungen r_k für $k = 0, 1, 2, 3$. Die Zwischenergebnisse für die allgemeinen Lösungen sind:

$$\begin{aligned}
r_0\left(x\right) &= c_0\left(x\right), \\
r_1\left(x,z\right) &= c_1\left(x\right) - z\partial_x g\left(x\right) r_0\left(x\right), \\
r_2\left(x,z\right) &= c_2\left(x\right) - z\partial_x g\left(x\right) c_1\left(x\right) + \frac{z^2}{\sigma^2}\partial_x f\left(x\right) r_0\left(x\right), \\
r_3\left(x,z\right) &= c_3\left(x\right) + z\left(\partial_x f\left(x\right)\partial_x g\left(x\right) r_0\left(x\right) - \partial_x g\left(x\right)\partial_x f\left(x\right) r_0\left(x\right) - \partial_x g\left(x\right) c_2\left(x\right)\right) \\
&\quad - \frac{1}{3\sigma^2} z^3 \partial_x g\left(x\right)\partial_x f\left(x\right) r_0\left(x\right) \text{ mit } c_1\left(x\right) \equiv 0
\end{aligned}$$

Es müssen noch die Funktionen $c_k\left(x\right)$ bestimmt werden. Eine Differentialgleichung für $c_k\left(x\right)$ kann mithilfe der Fredholm-Alternative abgeleitet werden. Warum kann dies für $c_k\left(x\right)$ nur mithilfe der Fredhom Alternative in Ordnung $\mathcal{O}\left(\epsilon^k\right)$, also der Fredholm Alternative für die Funktion

$r_{k+2}(x,z)$, gelingen?
Leite folgende Differentialgleichungen 2. Ordnung für $c_0(x) = r_0(x)$, $c_1(x)$ und $c_2(x)$

$$\frac{\sigma^2}{2}\partial_x g(x)\partial_x g(x) c_0(x) = \partial_x f(x) c_0(x),$$
$$\frac{\sigma^2}{2}\partial_x g(x)\partial_x g(x) c_1(x) = \partial_x f(x) c_1(x),$$
$$-\partial_x g(x)\partial_x \frac{f(x)^2}{g(x)} r_0(x) + \partial_x g(x)\frac{\sigma^2}{2}\partial_x g(x) c_2(x)$$
$$+\frac{3}{4}\sigma^2\partial_x g(x)\partial_x g(x)\partial_x f(x) r_0(x) - \partial_x f(x) c_2(x) = \frac{1}{2}\partial_x f(x)\partial_x f(x) r_0(x) \text{ mit} c_1(x) \equiv 0$$

ab.
Achtung: $c_0(x)$ und $c_1(x)$ erfüllen im Allgemeinen unterschiedliche Rand- und Normierungsbedingungen!
Löse die erhaltenen Differentialgleichungen.
Hinweis: Setze $c_k(x) = \tilde{c}_k(x) r_0(x)$ und löse für $\tilde{c}_k(x)$ $(k>0)$. Benutze

$$\partial_x r_0(x) = r_0(x)\left(\frac{2}{\sigma^2}\frac{f(x)}{g(x)^2} - \partial_x \log(g(x))\right).$$

Lösungen:

$$c_0(x) = r_0(x) = \frac{1}{g(x)}\exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\int^x \mathrm{d}\tilde{x}\frac{f(\tilde{x})}{g(\tilde{x})^2}\right),$$
$$c_1(x) = r_0(x)\left(\frac{2}{\sigma^2}C_{11}\int^x \mathrm{d}\hat{x}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}\int^{\hat{x}}\mathrm{d}\tilde{x}\frac{\left(f(\tilde{x}) + \frac{\sigma^2}{2}g(x)g'(x)\right)}{g^2(\tilde{x})}\right) + C_{12}\right),$$
$$c_2(x) = -\frac{2C_{21}}{\sigma^2}r_0(x)\int^x \mathrm{d}\tilde{x}\frac{1}{g(\tilde{x})^2 r_0(\tilde{x})} + \frac{r_0(x)}{\sigma^2}\left(\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\right) - \frac{3}{2}\partial_x f(x) r_0(x) + r_0(x) C_{22}.$$

Die Integrationskonstanten C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} müssen aus der Normierungsbedingung Gl. (4) bestimmt werden. Man kann zeigen (soll hier nicht gemacht werden), daß für natürliche Randbedingungen $C_{11} = C_{12} = C_{21} = 0$ ist. Deswegen kann man $c_1(x) \equiv 0$ setzen. Bestimme C_{22}

$$C_{22} = -\int_{b_1}^{b_2}\mathrm{d}\tilde{x}\frac{1}{\sigma^2}r_0(\tilde{x})\left(\frac{f(\tilde{x})^2}{g(\tilde{x})^2}\right).$$

Zeige, daß die stationäre Lösung $p_s^\epsilon(x)$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$p_s^\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z p^\epsilon(x,z)$$
$$= r_0(x)\left(1 + \epsilon^2\left(-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{f(x)^2}{g(x)^2} + \int_{b_1}^{b_2}\mathrm{d}\tilde{x} r_0(\tilde{x})\frac{f(\tilde{x})^2}{g(\tilde{x})^2}\right) - f'(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right).$$

ist. Die Beiträge in Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ verschwinden also, deswegen muss man diese Tortur bis zur 2. Ordnung in ϵ durchhalten.
Betrachte das Modell des logistischen Wachstums von Aufgabe 5, allerdings jetzt mit farbigem statt weißem Rauschen. Zeige, daß die stationäre Lösung für $p_s^\epsilon(x)$ bis zur 2. Ordnung in ϵ

$$p_s^\epsilon(x) = r_0(x)\left(1 + \epsilon^2\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sigma^2}(\lambda - x)^2\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right)\right)$$

ist. Bestimme den wahrscheinlichsten Wert von $p_s^\epsilon(x)$ in Abhängigkeit von ϵ. Sind die Ergebnisse qualitativ vergleichbar mit denen für Gaußsches Weißes Rauschen ($\epsilon = 0$)?

Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

Vorlesung:

Mi um 12:00 Uhr – 14:00 Uhr in ER 164,
Do um 14:00 Uhr – 16:00 Uhr in EW 202.

Scheinkriterien:

Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- L. Arnold: Stochastische Differentialgleichungen
- C. W. Gardiner: Handbook of Stochastic Methods
- H. Haken: Synergetics. Introduction and Advanced Topics
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions
- J. L. Klimontovich: Statistical Physics
- A. S. Mikhailov: Foundations of Synergetics I
- R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Harald Engel	Mi	14:30–16:00 Uhr	EW 738	79462
Jakob Löber	Mo	14:30–16:00 Uhr	EW 737	23001

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss12