

Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

7. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Mi. 6.06.2012 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 11 (5 Punkte): Ausbreitungsgeschwindigkeit der Pest

Betrachte folgendes zweikomponentige Reaktions-Diffusions-System als Modell für die Ausbreitung einer Epidemie

$$\begin{aligned}\partial_t S(x, t) &= -rI(x, t)S(x, t) + D\partial_x^2 S(x, t), \\ \partial_t I(x, t) &= rI(x, t)S(x, t) - aI(x, t) + D\partial_x^2 I(x, t),\end{aligned}$$

dabei steht I (infected) für die Dichte der von der Krankheit Infizierten und S (susceptibles) für die Dichte der Anfälligen, r ist ein Maß für die Ansteckungswahrscheinlichkeit, $1/a$ ist die Lebenserwartung eines Infizierten und D der Diffusionskoeffizient.

Reskaliere die Gleichungen mit $S = S_0 \tilde{S}$ auf die Form

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{t}} \tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= -\tilde{I}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{I}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \tilde{I}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \lambda \tilde{I}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{I}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad \lambda = \frac{a}{rS_0}.\end{aligned}$$

Gehe in ein mitbewegtes Koordinatensystem $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t}$ über und nimm an, daß die Pulsprofile in diesem Koordinatensystem stationär sind, $\tilde{S}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{S}(\tilde{z})$ und $\tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{I}(\tilde{z})$. Dies führt auf zwei gekoppelte ODEs mit den Randbedingungen

$$\tilde{I}(-\infty) = \tilde{I}(\infty) = 0, \quad 0 \leq \tilde{S}(-\infty) < \tilde{S}(\infty) = 1.$$

Linearisiere die Gleichungen um $\tilde{S} \rightarrow 1$ und $\tilde{I} \rightarrow 0$ und bestimme die Geschwindigkeit $\tilde{c} = -\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} > 0$ in reskalierten Größen. (Die linearisierte Gleichung für \tilde{I} ist diejenige eines gedämpften harmonischen Oszillators. Der aperiodische Grenzfall tritt für einen bestimmten Wert von \tilde{c} auf, welcher der gesuchten Geschwindigkeit entspricht.) Unter welcher Bedingung für λ existieren diese Wellen? Wie kommt man auf die Geschwindigkeit

$$c = 2\sqrt{D}\sqrt{rS_0 - a}$$

in unskalierten Größen? Interpretiere die Bedingung für λ in unskalierten Größen. Jetzt soll die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Pestwelle in Europa um 1350 abgeschätzt werden. Eine Bevölkerung von 80000000 Menschen war auf der Fläche West- und Mitteleuropas von 1583000km^2 verteilt. Die durchschnittliche Lebenserwartung einer von der Pest befallenen Rattenkolonie ist 24 Tage, was auch für den Menschen angenommen wird. Der Diffusionskoeffizient kann als $22500\frac{\text{km}^2}{\text{a}}$ angenommen werden und r wird zu $r = 1\frac{\text{km}^2}{\text{a}}$ abgeschätzt. Das Ergebnis $c \approx 700\frac{\text{km}}{\text{a}}$ kann z. B. hier

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Blackdeath2.gif> oder hier

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Pestilence_spreading_1347-1351_europe.png&filetimestamp=20100121131823 verglichen werden.

7. Übung TPVI SS12

Vorlesung: Mi um 12:00 Uhr – 14:00 Uhr in ER 164,
Do um 14:00 Uhr – 16:00 Uhr in EW 202.

Scheinkriterien: Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- L. Arnold: Stochastische Differentialgleichungen
- C. W. Gardiner: Handbook of Stochastic Methods
- H. Haken: Synergetics. Introduction and Advanced Topics
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions
- J. L. Klimontovich: Statistical Physics
- A. S. Mikhailov: Foundations of Synergetics I
- R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise

Sprechzeiten:	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
	Prof. Harald Engel	Mi	14:30–16:00 Uhr	EW 738	79462
	Jakob Löber	Mo	14:30–16:00 Uhr	EW 737	23001

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
<http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss12>