Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

10. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 19.06.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 28: *Unitäre Transformationen (mündlich)*

Es sei ein unitärer Operator U gegeben. Eine unitäre Transformation eines Zustandes $|\Psi\rangle$ und eines Operators $\hat{A}$ sei gegeben durch

$$|\Psi\rangle \to U|\Psi\rangle, \qquad \hat{A} \to U\hat{A}U^\dagger.$$

Überprüfen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) Die Eigenvektoren von U haben den Betrag 1.

(b) Die Eigenvektoren von U sind orthogonal.

(c) Der Operator $e^{i\hat{B}}$ ist unitär, wenn $\hat{B}$ hermitesch ist.
Das Skalarprodukt zwischen zwei Zuständen $|\Psi\rangle$ und $|\Phi\rangle$ bleibt durch eine unitäre Transformation erhalten.

(d) Der Erwartungswert $\langle\hat{A}\rangle$ bleibt bei einer unitären Transformation erhalten.
Die Eigenwerte von $\hat{A}$ bleiben durch eine unitäre Transformation erhalten.

Aufgabe 29 (8 Punkte): *Bewegungsgleichungen im Heisenbergbild (schriftlich) (1+3+2+2 Punkte)*

Im Schrödinger-Bild sei ein Einteilchen-Hamiltonian in $d = 1$ Dimension gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für die fundamentalen Vertauschungsrelationen im Heisenberg-Bild $[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ und $[\hat{x}(t), \hat{x}(t)] = [\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator im Heisenbergbild durch

$$\hat{H}_H(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}_H^2(t) + V(\hat{x}_H(t))$$

gegeben ist. Stellen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für Orts- und Impulsoperator auf.

(c) Leiten Sie aus der Heisenberg-Bewegungsgleichung einen allgemeinen Ausdruck für die Zeitentwicklung von Erwartungswerten einer Observablen her und geben Sie insbesondere die entsprechenden Gleichungen für die Erwartungswerte von Ort und Impuls an.

(d) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(\hat{x}) = \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$ und geben Sie die Differentialgleichung für $\hat{x}(t)$ an. Berechnen Sie mit Hilfe der Lösung den Kommutator $[\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2)]$.

Aufgabe 30 (12 Punkte): *Landau-Niveaus (schriftlich) (2+3+1+5+1 Punkte)*
Ein geladenes Teilchen im Magnetfeld wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{\Pi}}^2$$

beschrieben, wobei

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}}$$

der verallgeminerte Impuls ist und $\hat{\mathbf{A}}$ das Vektorpotential, welches mit dem Magnetfeld verknüpft ist ($\nabla \times \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{B}}$). Zur Vereinfachung betrachten wir ein homogenes $\mathbf{B}$-Feld in z-Richtung. Ziel der Übung ist es, die Energieniveaus (Landau-Niveaus) des Teilchens zu berechnen.

(a) Zerlegen Sie den verallgemeinerten Impuls in seinen parallelen $\hat{\mathbf{\Pi}}_{||}$ und senkrechten Anteil $\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}$ bezogen auf die z-Richtung des Magnetfeldes und bestimmen Sie $\hat{H}_{||} := \frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{\Pi}}_{||}^2$ und $\hat{H}_{\perp} := \frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass $[\hat{H}_{||}, \hat{H}_{\perp}] = 0$.
Hinweis: Für ein homogenes Magnetfeld gilt: $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$

(c) Geben Sie das Energiesprektrum für $\hat{H}_{||}$ an.
Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass das Spektrum von $\hat{H}_{||}$ kontinuierlich ist.

(d) Bestimmen Sie das Spektrum von $\hat{H}_{\perp}$. Benutzen Sie dazu die Operatoren

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_c\mu}}\hat{\Pi}_y, \quad \hat{S} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_c\mu}}\hat{\Pi}_x \quad \text{mit } \omega_c = -q\frac{B_z}{\mu}.$$

Bestimmen Sie auch den Kommutator $[\hat{Q}, \hat{S}]$. Verwenden Sie nun

$$\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{S}), \quad \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} - i\hat{S})$$

und Ihr Wissen über den harmonischen Oszillator.

(e) Wie lauten die Landau-Niveaus? Interpretieren Sie diese.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/?116154