Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

11. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 26.06.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 31: *Drehimpulsoperator (mündlich)*

In der Vorlesung wurde der Drehimpulsoperator $\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$ eingeführt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen!

(i) $[\hat{L}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k$,

(ii) $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$, (*Hinweis:* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.)

(iii) $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_j] = 0$.

(iv) Falls ein Operator mit zwei Komponenten des Drehimpulsoperators kommutiert, so kommutiert er auch mit der dritten Komponente.

Aufgabe 32 (6 Punkte): *Drehimpulsoperator II (schriftlich) (1+2+1+2 Punkte)*

Aus Aufgabe 31 (iii) wissen wir nun also, dass $\hat{\mathbf{L}}^2$ und (z.B.) $\hat{L}_z$ ein gemeinsames System von Eigenzuständen $|lm\rangle$ besitzen. Es gelten die Eigenwertgleichungen:

$$\hat{\mathbf{L}}^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle\,, \quad \hat{L}_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle.$$

Ferner gilt:

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \quad \hat{L}_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,|lm\pm 1\rangle\,.$$

(a) Berechnen Sie: $\langle lm|\hat{L}_i|lm\rangle$ für $i \in \{x, y, z\}$.

(b) Berechnen Sie $\langle lm|\left(\hat{L}_i - \langle\hat{L}_i\rangle\right)^2|lm\rangle$ für $i \in \{x, y, z\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die kleinste Streuung $\Delta\hat{L}_x$ bzw. $\Delta\hat{L}_y$ erreicht wird, wenn $|m| = l$ ist.

(d) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es zu gegebenem l genau $m = 2l+1$ Einstellungen gibt. Mit $l = 1$ ergeben sich also 3 mögliche Werte für m. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$ an und berechnen Sie nun mit Hilfe dieses Ergebnisses auch die Matrixdarstellung von $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$.

Aufgabe 33 (6 Punkte): *Larmorpräzession (schriftlich) (2+4 Punkte)*

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$. Zum üblichen Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms $\hat{H}_0$ kommt dann ein Zusatzterm $\hat{H}_1 = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{L}}$, der die Wechselwirkung des magnetischen Momentes des Elektrons mit dem Magnetfeld beschreibt.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_i \rangle$ der Komponenten des Drehimpulsoperators auf.
Hinweis: Der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms $\hat{H}_0$ ist rotationssymmetrisch, also gilt $[\hat{L}_i, \hat{H}_0] = 0$.

(b) Lösen sie die Bewegungsgleichungen für den Fall, dass sich das Elektron anfänglich im $\hat{L}_z$-Eigenzustand $|11\rangle$ befindet.

Aufgabe 34 (8 Punkte): *Spin-Rotation (schriftlich) (4+3+1 Punkte)*
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Operator

$$\hat{U}(\underline{\alpha}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\alpha}\cdot\underline{\hat{L}}}$$

einen Zustand um die $\underline{\alpha}$-Achse um den Winkel $|\underline{\alpha}|$ dreht. In dieser Aufgabe soll der Zustand eines Spin-1/2 Teilchen um $360°$ um die x-Achse gedreht werden. Die Spinmatrizen $\hat{S}_i = \hbar/2\,\hat{\sigma}_i$ findet man in der VL in (11.36).
Hinweis: Die Aufgabenteile können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

(a) Zeigen Sie, dass sich der Drehoperator um die x-Achse $\hat{U}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{S}_x}$ darstellen lässt durch

$$\hat{U}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -i\sin(\alpha/2) \\ -i\sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung von $\sin$, $\cos$ und der e-Funktion und $\hat{\sigma}_x^2 = \mathbb{1}$.

(b) Der Zustand $|\uparrow_z\rangle = (1, 0)$ wird nun um den Winkel α gedreht

$$|\psi_\alpha\rangle = \hat{U}(\alpha)|\uparrow_z\rangle.$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\hat{S}_y$ und $\hat{S}_z$ als Funktion von α.

(c) Ist $|\psi_{\alpha=2\pi}\rangle = |\uparrow_z\rangle$?

	Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Sprechzeiten:	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/?116154