Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 24.04.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 4: **(mündlich)** *Hohlraumstrahlung*

Wie aus der Vorlesung bekannt ist, lautet die Planck'sche Formel für die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1},$$

wobei π, $\hbar$, c und k_B die üblichen Konstanten sind und ω, T die Kreisfrequenz bzw. die Temperatur bezeichnen. Leiten Sie ausgehend von der Planck'schen Strahlungsformel folgende Gesetze her:

(a) Rayleigh-Jeans-Gesetz: Betrachten Sie den Grenzfall kleiner Frequenzen ($\hbar\omega \ll k_B T$).

(b) Wien'sches Gesetz: Betrachten Sie den Grenzfall großer Frequenzen ($\hbar\omega \gg k_B T$).

(c) Wien'sches Verschiebungsgesetz: Bestimmen Sie aus dem Grenzfall großer Frequenzen aus 2. das Maximum der spektralen Energiedichte.

(d) Stellen Sie die Lösung von (a) und (b) zusammen mit der Planck'schen Strahlungsformel grafisch dar.

Aufgabe 5 (5 Punkte): *Stefan-Boltzmann-Gesetz (schriftlich)*

Berechnen Sie die Gesamtenergie U der Hohlraumstrahlung aus Aufgabe 4 in Abhängigkeit von der Temperatur T

$$U(T) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega.$$

Tipp: Verwenden Sie ggf. die Reihendarstellung der geometrischen Reihe.
Außerdem gilt $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Aufgabe 6 (15 Punkte): *Quantenmechanische Erwartungswerte (schriftlich) (4+3+4+4 Punkte)*

Der Erwartungswert einer Ortskoordinate in einem durch die Wellenfunktion Ψ beschriebenen Zustand ist

$$\langle x \rangle_\Psi(t) = \int_{-\infty}^\infty x |\Psi(x,t)|^2 dx$$

wobei die Verteilungsfunktion $|\Psi(x,t)|^2$ die normierte Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist. Wir lassen im Folgenden den Index Ψ und die Kennzeichung der Zeitabhängigkeit weg. Das Moment der Ordung n von x ist definiert als $\langle x^n \rangle$. Der Erwartungswert ist also das erste Moment.

(a) Zeigen Sie, dass:

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \left.\frac{d^n}{dk^n}\right|_{k=0} \mathcal{F}(|\Psi(x,t)|^2), \quad n \geq 1 \ ,$$

wobei $\mathcal{F}(f(x,t)) = g(k,t)$ die Fouriertransformation bzgl. x ist. Man nennt $\mathcal{F}(f(x,t))$ die zur Verteilung $f(x,t)$ gehörende charakteristische Funktion.

2. Übung TPII SoSe12

Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons der Masse m gelte

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}A(t)} exp\left(-\frac{(x-\frac{\hbar p_0}{m}t)^2}{2A(t)^2}\right) ,$$

mit $A(t) = a\sqrt{1/2 + \hbar t^2/(2m^2a^4)}$ und $a = const.$

(b) Zeigen Sie, dass die gesamte Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons zu jedem Zeitpunkt auf Eins normiert ist.

(c) Berechnen Sie mit (a) den wahrscheinlichsten Ort des Elektrons (sprich, den Erwartungswert des Ortes $\langle x\rangle$).

(d) Berechnen Sie ebenso die Standardabweichung $\sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$.

	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Sprechzeiten:	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143