Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mi. 2.05.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Hinweis: **Weil am 1.5. (Feiertag) keine Tutorien stattfinden, gibt es diesmal nur schriftliche Aufgaben. Am 2.5. gibt es einen zusätzlichen Tutoriumstermin um 16 Uhr im EB 133C. Hier kann jede/r hingehen, deren/dessen Tutorium aufgrund des Feiertages ausgefallen ist.**
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.

Aufgabe 7 (10 Punkte): *3d-Potentialtopf (schriftlich) (3+7 Punkte)*
Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen in einer dreidimensionalen Box, d.h. einem Würfel mit der Kantenlänge L. In der Box $(0 < x, y, z < L)$ genüge das Teilchen der freien Schrödingergleichung.
Behandeln Sie die Teilchenzustände mit Hilfe zweier Arten von Randbedingungen für die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$:

(i) $\psi(\vec{r}, t) = 0$ für $\vec{r}$ auf dem Rand des Würfels

(ii) periodische oder Born-von Karman Randbedingungen $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r} + L\vec{e}_i, t)$ mit $i = x, y, z$.

1. Randbedingung (ii) lässt sich für die in der Vorlesung eingeführten ebenen Wellen erfüllen. Wie? Bestimmen Sie die Amplitude der ebenen Wellen aus der Normierung des Zustandes.
2. Randbedingung (i) erfordert eine neue Lösung der freien Schrödingergleichung.
   (a) Setzen Sie den Separationsansatz $\psi(\vec{r}, t) = g(t)\varphi(\vec{r})$ in die Schrödingergleichung ein und bestimmen Sie $g(t)$.
   (b) Bestimmen Sie Lösungen für $\varphi(\vec{r})$ in der Form $\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$, die die Randbedingung (i) erfüllen. Normieren Sie die Lösungen.
3. Bestimmen Sie für beide Arten von Teilchenzuständen den Mittelwert des Ortes $\langle\vec{r}\rangle$ und die Unschärfe $\Delta r = \left[\langle\vec{r}^2\rangle - \langle\vec{r}\rangle^2\right]^{1/2}$

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Wahrscheinlichkeitsstrom im 1d-Potentialtopf (schriftlich) (3+3+2+2 Punkte)*
In einem Potentialtopf gelte

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t)$$

und

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)\, e^{-i\omega_n t},$$

mit

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{\hbar k_n^2}{2m}.$$

Lösungen der Schrödingergleichung sind und die Randbedingungen erfüllen.
Warum ist dann auch $\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n\, \psi_n(x,t)$ für $c_n \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Schrödingergleichung?

2. Berechnen Sie nun für den Ansatz

$$\phi(x,t) = a\,\psi_1(x,t) + b\,\psi_2(x,t) \qquad (a,b \in \mathbb{R}, a^2+b^2=1)$$

die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\phi(x,t)|^2$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$.

3. Plotten Sie beides für $a = b = 1/\sqrt{2}$, $\hbar = 1$, $m = 1$ und $L = 1$ als Funktion von x für ca. 10 verschiedene t Werte zwischen 0 und 0.43. (Alternativ können Sie auch eine Animation erstellen und per Email einreichen.)

4. Berechnen Sie mit Hilfe der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte den Erwartungswert des Ortes $\langle x \rangle$. *Hinweis:* $\int dx x \sin^2 x = x^2/4 - x/4 \sin(2x) - 1/8 \cos(2x)$,
$\int dx x \sin(ax)\sin(2ax) = \frac{2}{3a}\left[x\sin^3(ax) + \frac{3\cos(ax)}{4a} + \frac{\cos(3ax)}{12a}\right]$.

	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Sprechzeiten:	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143