Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

4. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 8.05.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 9: *Skalarprodukt (mündlich)*

Es seien $\Phi, \Psi \in L^2$, wobei L^2 der Raum der quadratintegrablen Funktionen ist. Das Skalarprodukt ist wie folgt definiert

$$\langle \Phi | \Psi \rangle := \int \Phi^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \mathrm{d}^3 r.$$

Zeigen Sie, dass diese Definition tatsächlich die Eigenschaften für ein Skalarprodukt erüllt. Verwenden Sie dazu die Formeln (4.4) aus der Vorlesung.

Aufgabe 10 (6 Punkte): *Translationsoperator (schriftlich) (3+3 Punkte)*
Betrachten Sie den Oparator $\hat{T}_\xi$, der die Wellenfunktion $\psi(x)$ von x nach $x+\xi$ verschiebt, d.h.

$$\hat{T}_\xi \psi(x) = \psi(x+\xi).$$

(a) Stellen Sie den Translationsoperator $\hat{T}_\xi$ mit Hilfe des Impulsoperators $\hat{p}$ dar.

(b) Zeigen Sie ferner, dass

$$\hat{T}_\xi \hat{x} \hat{T}_\xi^{-1} = \hat{x} + \xi$$

gilt.

Aufgabe 11: *Hermitesche Operatoren (mündlich)*
Wie in der Vorlesung definiert, ist ein Operator $\hat{A}^\dagger$ adjungiert zu $\hat{A}$ wenn

$$\langle \phi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle$$

für alle ψ, ϕ gilt. Ein Operator heißt hermitesch, wenn ferner $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ gilt. Überprüfen Sie **mit dieser Definition** ob die folgenden Operatoren hermitesch sind.

(a) $\hat{A}_1 = \hat{x}\hat{p}$

(b) $\hat{A}_2 = \hat{p}\hat{x}$

(c) $\hat{A}_3 = \frac{1}{2}(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})$

Aufgabe 12 (14 Punkte): *Operatorrelationen (schriftlich) (2+2+3+3+4 Punkte)*
Es seien $\hat{\mathbf{r}}$ der Ortsoperator und $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ der Impulsoperator.

(a) Berechnen Sie den Kommutator $[f(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}]$.

(b) Es sei $f(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n p^n$ die Taylorentwicklung der Funktion $f(p)$. Ein Operator der Form $f(\hat{\mathbf{p}})$ kann analog als $\hat{f} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \hat{\mathbf{p}}^n$ entwickelt werden. Bestimmen Sie mit dieser Definition den Kommutator $[f(\mathbf{p}), \mathbf{r}]$.

(c) Zeigen Sie die Jacobi-Identität für lineare, nichtkommutative Operatoren $\hat{A}$,$\hat{B}$ und $\hat{C}$:

$$\left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right]+\left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right]+\left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0$$

(d) Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ lineare Operatoren. Zeigen Sie unter Verwendung von $e^{\hat{A}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}$, dass die folgende Relation gilt:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{}A}=\hat{B}+\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]+...$$

(e) Der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sei eine Zahl ic, $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=ic$. Zeigen Sie, dass dann folgende Relation gilt:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-ic/2}.$$

	Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
Sprechzeiten:	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/?116154