Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 4. Mai 2012

Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

5. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 15.05.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 13: *Impulsdarstellung (mündlich)*

Sei $\psi(x,t)$ eine eindimensionale Wellenfunktion in Ortsdarstellung. Die *Impulsdarstellung* der Wellenfunktion ist gegeben durch

$$\varphi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(x,t) e^{-ipx/\hbar}\, dx,$$

wobei wir hier aus technischen Gründen die Fouriertransformation umskaliert haben, um als Variable den physikalischen Impuls $p = \hbar k$ zu erhalten.

(a) Berechnen Sie den Ortsoperator in der Impulsdarstellung.
Hinweis: Verwenden Sie die Fourier-Transformation.

(b) Stellen Sie die freie ($U(x) = 0$) 1D-Schrödingergleichung in Impulsdarstellung $\varphi(p,t)$ auf.
Hinweis: Fourier-transformieren Sie $\psi(x,t)$ und integrieren Sie partiell.

(c) Was ändert sich bei vorhandenem Potential, d.h. für $U(x) \neq 0$?

(d) Wie lautet die zugehörige stationäre Schrödinger-Gleichung?

Aufgabe 14 (16 Punkte): *Ehrenfestsches Theorem (schriftlich) (2+2+9+3 Punkte)*

(a) Zeigen Sie $[\hat{p}_k, \hat{x}_l] = -i\hbar\delta_{kl}$, wobei $\hat{\mathbf{p}}$ der Impuls- und $\hat{\mathbf{x}}$ der Ortsoperator ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung die Bewegungsgleichung für den Erwartungswert eines (nicht explizit zeitabhängigen) Operators $\hat{A}$:

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle \ .$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten.

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{x}}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle \ , \qquad \frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle = \langle\hat{\mathbf{F}}\rangle \ , \qquad \frac{d}{dt}\langle\hat{L}_z\rangle = \langle\hat{T}_z\rangle \ .$$

Die Operatoren sind im Einzelnen: Ortsoperator $\hat{\mathbf{x}}$, Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}$, Kraftoperator $\hat{\mathbf{F}} := -\nabla V$, Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} := \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ und Drehmomentoperator $\hat{\mathbf{T}} := \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{F}}$.

(d) In welchen Fällen erhält man für $\langle\hat{\mathbf{x}}\rangle$ eine klassische Bewegungsgleichung? Welche physikalischen Systeme schließt das ein? Unter welcher Annahme erhält man für $\langle\hat{\mathbf{x}}\rangle$ nur näherungsweise eine klassische Bewegungsgleichung?
Hinweis: Entwickeln Sie $\hat{\mathbf{F}}$ in eine Taylorreihe um $\langle\hat{\mathbf{x}}\rangle$.

Aufgabe 15 (4 Punkte): *Unschärferelation (schriftlich)*
Beweisen Sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung (Skript (4.4a)), die verallgemeinerte Unschärferelation

$$\triangle\hat{A}\triangle\hat{B} \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|,$$

zweier hermitescher Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Für die Unschärfe (Standardabweichung) $\triangle\hat{A}$ gilt:

$$(\triangle\hat{A})^2 = \left\langle\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)^2\right\rangle.$$

	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Sprechzeiten:	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/?116154