Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 22.05.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 16: *Hermitesche Operatoren (mündlich)*

Sei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator. Zeigen Sie:

(a) Die Erwartungswerte sind reell.

(b) Die Eigenwerte sind reell.

(c) Die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(d) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen (die wir in Aufgabe 8 als Lösungen des 1d-Potentialtopf kennengelernt haben)

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)$$

mit

$$k_n = \frac{\pi n}{L}$$

orthonormiert sind.

Aufgabe 17 (12 Punkte): *Doppel-δ-Potential (schriftlich) (5+2+3+2 Punkte)*

Eine einfache Beschreibung für das Elektron im H_2^+-Ion ist durch folgendes Modellpotenzial gegeben:

$$V(x) = -\frac{e^2}{\pi\epsilon_0}\big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\big).$$

Die Lösung der Wellenfunktion lautet:

$$\varphi(x) = A_\pm \begin{cases} e^{kx} & \text{für } -\infty < x < -a \\ \frac{\pm e^{-ka}}{e^{ka}\pm e^{-ka}}\left(e^{kx}\pm e^{-kx}\right) & \text{für } -a < x < a \\ \pm e^{-kx} & \text{für } a < x < \infty \end{cases}$$

mit $A_\pm = \left(e^{ka}\pm e^{-ka}\right)\sqrt{k}\left(2\pm 2e^{-ka}\pm 4ake^{-2ka}\right)^{-1/2}$ und $k>0$.

1. Leiten Sie ausgehend von der Lösung der Wellenfunktion eine Bestimmungsgleichung für die Energien $E_\pm(a)<0$ des gebundenen Elektrons her. Leiten Sie dafür zunächst die folgende Bedingung für die Ableitung der Wellenfunktion an der Unstetigkeitsstellen $x=a$ her:

$$\varphi'(a+\epsilon)-\varphi'(a-\epsilon) = -\frac{2me^2}{\hbar^2\pi\epsilon_0}\varphi(a),$$

indem Sie die Schrödingergleichung in einem 2ϵ-Intervall um $x=a$ integrieren. Gehen Sie analog bei der Unstetigkeitsstelle $x=-a$ vor.

2. Zeigen Sie durch eine graphische Überlegung, dass zu jedem Kernabstand $2a$ genau eine *symmetrische* Lösung der stationären Schrödingergleichung mit Energie $E_+(a) < 0$ existiert.
3. Zeigen Sie, dass es eine weitere *antisymmetrische* Lösung mit Energie $E_-(a) < 0$ gibt, wenn für den Kernabstand $2a > \pi\hbar\epsilon_0/(me^2)$ gilt.
4. Skizzieren Sie die symmetrische und antisymmetrische Lösung sowie das Potential.

Aufgabe 18 (8 Punkte): *Pauli-Matrizen (schriftlich) (3+2+3 Punkte)*

Operatoren in der Quantenmechanik sind linear. Sie lassen sich deshalb als Matrizen darstellen. Analog können Zustände nicht nur als quadratintegrable Funktionen, sondern auch als Vektoren dargestellt werden. Die den drei Raumrichtungen des Spins des Elektrons zugehörigen Operatoren sind die Pauli-Matrizen:

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ein Ensemble von Teilchen ist im Zustand $|a\rangle$ präpariert als eine Überlagerung zweier Spinzustände $|a\rangle = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Spinoperatoren $\langle \hat{S}_x \rangle$, $\langle \hat{S}_y \rangle$ und $\langle \hat{S}_z \rangle$ im Zustand $|a\rangle$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_z$.

(c) Seien $b_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $b_2 = 3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Messwerte einer Messung von $\hat{S}_x$ bzw. $\hat{S}_z$.

Hinweis: Sie können alle Formeln, die Sie bisher in der Vorlesung für Operatoren und Zustände gelernt haben, weiterhin anwenden, wenn Sie folgendes Skalarprodukt verwenden: Seien $\chi = (\chi_1\, \chi_2 \ldots \chi_n \ldots)^T$ und $\Psi = (\Psi_1\, \Psi_2 \ldots \Psi_n \ldots)^T$ zwei Vektoren, dann ist ihr Skalarprodukt durch $\langle \chi | \Psi \rangle := (\chi_1^*\, \chi_2^* \ldots \chi_n^* \ldots)(\Psi_1\, \Psi_2 \ldots \Psi_n \ldots)^T$ gegeben.

	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Sprechzeiten:	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/?116154