Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 29.05.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 19: *Streuung am δ-Peak (mündlich)*

Gegeben sei das Potential $V(x) = \alpha\delta(x)$ mit $\alpha > 0$. Ein Teilchen mit der Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ falle von links in Form einer ebenen Welle e^{ikx} ein.

(a) Wie lautet der Lösungsansatz für die Welle links vom Peak ($x < 0$) und rechts vom Peak ($x > 0$) ?

(b) Es sei $A(k)$ die Amplitude der reflektierenden Welle und $B(k)$ die Amplitude der transmittierenden Welle. Bestimmen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion und ihrer Ableitung die Amplituden $A(k)$ und $B(k)$.

(c) Bestimmen Sie aus $A(k)$ und $B(k)$ den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten und skizzieren Sie diese in Abhängigkeit von k.

(d) In der Vorlesung wird der Transmissionskoeffizient $T(k)$ für ein rechteckiges Potential der Höhe U_0 und der Breite b bestimmt. Zeigen Sie, dass der Grenzfall $U_0 \to \infty$ und $b \to 0$ mit dem Ergebnis aus (c) übereinstimmt, wenn $U_0 b \to \alpha = \text{const}$ bleibt.

Aufgabe 20 (13 Punkte): *Teilchen im Doppelmuldenpotential (schriftlich) (6+2+3+2 Punkte)*

Ein Doppelmuldenpotential kann am einfachsten durch einen unendlich hohen Potentialtopf, der in der Mitte durch einen δ-Peak getrennt ist, beschrieben werden. Das Potential ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} V(x) &= \alpha\delta(x) \qquad \text{für} \quad |x| < a \\ V(x) &= \infty \qquad \text{für} \quad |x| > a. \end{aligned}$$

wobei $\alpha > 0$.

(a) Finden Sie zuerst die stationären Lösungen der Schrödingergleichung für $x < 0$ (Bereich I) und für $x > 0$ (Bereich II). Die Normierungskonstanten können hierbei noch unbestimmt bleiben. Welche transzendentale Gleichung ergibt sich für die Wellenzahlen k? Wie lauten die zeitabhängigen Lösungen $\Phi_{I,II}(x,t)$?
Hinweis: Verwenden Sie für die stationären Lösungen den Ansatz $\phi_{I,II}(x) = A_{I,II}\sin(kx + \varphi_{I,II})$ und die Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion und ihrer Ableitung.

(b) Nehmen Sie an, dass $m\alpha a/\hbar^2 \gg 1$. Zeigen Sie, dass der untere Teil des Spektrums ($E \ll \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$) dann immer aus zwei paarweisen Energiezuständen besteht, die sehr eng beieinander liegen.

(c) Ein Teilchen sei nun im Zustand $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_1(x,t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2(x,t)$, wobei $\Phi_{1,2}(x,t)$ die Zustände mit dem Paar kleinster Energien sind. Bestimmen Sie nun die Normierungen der

$\Phi_{1,2}(x,t)$ bzw. schätzen Sie diese ab. Bestimmen Sie danach die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x,t)|^2$. Skizzieren Sie diese für verschiedene Zeiten (von $t = 0$ bis $t = 3.3$) oder erstellen Sie eine Animation. Verwenden Sie dazu die Parameter $a = \hbar = m = 1$, $\alpha = 5$.

(d) Nehmen Sie wieder an, dass $m\alpha a/\hbar^2 \gg 1$. Wie sieht das Energiespektrum für die höheren Energien ($E \gg \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$) aus?

Aufgabe 21 (7 Punkte): *Nichtsymmetrische Potentialstufe (schriftlich) (4+1+2 Punkte)*

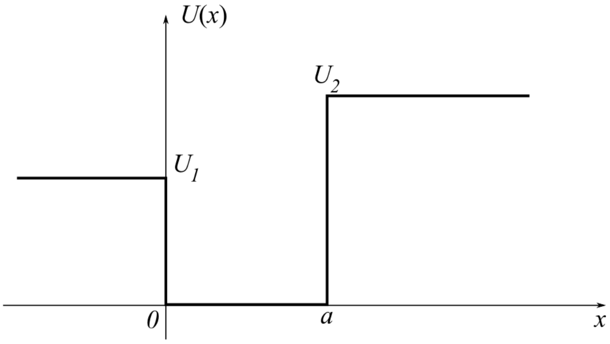
Gegeben sei eine eindimensionale, nichtsymmetrische Potentialstufe (siehe Skizze) mit ($U_1 \leq U_2$). Ein Teilchen habe die Energie $E < U_1$.

(a) Lösen Sie die Schrödingergleichung und bestimmen Sie die transzendentale Gleichung für die Wellenzahl k.

(b) Finden Sie eine Bedingung dafür, dass es zumindest einen gebundenen Zustand im Potential gibt.

(c) Betrachten Sie nun den Fall $U_1 = U_2 = U_0$. Wie lautet nun die transzendentale Gleichung für die Wellenzahl k? Zeigen Sie, dass man für ein sehr enges Potential ($U_0 \ll \hbar^2/ma^2$) nur einen gebundenen Zustand mit folgender Energie findet:

$$E_0 = U_0 - \frac{ma^2}{2\hbar^2} U_0^2.$$



	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Sprechzeiten:	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Judith Lehnert	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 246	29048
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Benjamin Regler	FR	12:15–13:15 Uhr	EW 060	26143
	Christian Fräßdorf	MO	15:00–16:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/?116154