Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

8. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 05.06.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 22 (8 Punkte): *Hermitesche Polynome (schriftlich) (2+3+3=8 Punkte)*

Die dimensionslose stationäre Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators lautet:

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\xi^2}+\xi^2\right]\psi(\xi)=\varepsilon\psi(\xi)\ , \tag{1}$$

wobei $\xi = x/\xi_0$, $\xi_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ und $\varepsilon = E/(\hbar\omega_0)$.

(a) Zeigen Sie, dass man mit dem Ansatz

$$\psi_n(\xi) = c_n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}\ , \tag{2}$$

aus (1) die Differentialgleichung:

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + 2n\right] H_n(\xi) = 0\ , \tag{3}$$

erhält, wobei $n = \varepsilon - 1/2$.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Methode der vollständigen Induktion, dass die Hermiteschen Polynome

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}\ ,$$

Lösungen von (3) sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen des harm. Oszillators (2) mit unterschiedlichem Index n und k zueinander orthogonal sind.
Hinweis: Bestätigen Sie zunächst mit Teil (b), dass $\frac{d}{d\xi}H_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi)$ und verwenden Sie $H_0(\xi) = 1$ um eine Formel für $\frac{d^n}{d\xi^n}H_n(\xi)$ zu finden.

Aufgabe 23: *Harmonischer Oszillator im $\mathcal{E}$-Feld (mündlich)*

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator der durch ein konstantes elektrischen Feld $\mathcal{E}$ gestört wird:

$$\hat{H}_q = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - q\mathcal{E}\hat{x}\ .$$

(a) Wie lautet die zugehörige Schrödingergleichung in Ortsdarstellung?

(b) Überführen Sie die Gleichung durch quadratische Ergänzung in die Form der Schrödingergleichung des ungestörten harm. Oszillators.

(c) Was sind die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen von $\hat{H}_q$?

(d) Skizzieren Sie das Potential des ungestörten harm. Oszillators und das von $\hat{H}_q$.

Aufgabe 24 (12 Punkte): *Kohärente Zustände (schriftlich) (2+2+2+3+3=12 Punkte)*
Kohärente (quasiklassische) Zustände ψ_α sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\hat{a}$.

(a) Zeigen Sie, dass kohärente Zustände nicht orthogonal sind, d.h. $|\langle\psi_\alpha|\psi_{\alpha'}\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\alpha'|^2}$.

(b) Beweisen Sie die Vollständigkeit ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$):

$$\frac{1}{\pi}\iint d\alpha_1\ d\alpha_2\ \psi_\alpha^*(x)\ \psi_\alpha(x') = \delta(x - x')\ .$$

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{H}\rangle$, sowie die Unschärfe ΔE der Energie in einem kohärenten Zustand.

(d) Zeigen Sie für kohärente Zustände die Heisenbergsche Unschärferelation $\triangle x \triangle p = \frac{\hbar}{2}$.

(e) Leiten Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für zeitabhängige Zustände her:

$$|\psi_\alpha(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi_0}\exp[-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{\xi_0^2}]\ .$$

wobei $\xi_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

<table>
<tr><td rowspan="8">Sprechzeiten:</td><td>Name</td><td>Tag</td><td>Zeit</td><td>Raum</td><td>Tel.</td></tr>
<tr><td>Prof. Holger Stark</td><td>FR</td><td>11:30–12:30 Uhr</td><td>EW 709</td><td>29623</td></tr>
<tr><td>Judith Lehnert</td><td>DO</td><td>13:00–14:00 Uhr</td><td>ER 246</td><td>29048</td></tr>
<tr><td>Max Schmitt</td><td>DO</td><td>10:00–11:00 Uhr</td><td>EW 708</td><td>25225</td></tr>
<tr><td>Andreas Zöttl</td><td>MI</td><td>11:00–12:00 Uhr</td><td>EW 702</td><td>24253</td></tr>
<tr><td>Benjamin Regler</td><td>FR</td><td>12:15–13:15 Uhr</td><td>EW 060</td><td>26143</td></tr>
<tr><td>Christian Fräßdorf</td><td>MO</td><td>15:00–16:00 Uhr</td><td>EW 060</td><td>26143</td></tr>
<tr><td>Wassilij Kopylov</td><td>MO</td><td>16:00–17:00 Uhr</td><td>EW 060</td><td>26143</td></tr>
</table>

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.tu-berlin.de/?116154