Prof. Holger Stark,
Judith Lehnert, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,
Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler

9. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 12.06.2012 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 25: *Harmonischer Oszillator in Matrixdarstellung (mündlich)*

Wir verwenden die Eigenzustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ des Teilchenzahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ als Basisvektoren des Hilbertraums:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \ldots$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung:

(a) des Erzeugungsoperators $\hat{a}^\dagger$, des

(b) Vernichtungsoperators $\hat{a}$,

(c) des Ortsoperators $\hat{x}$, des Impulsoperators $\hat{p}$

(d) und des Hamiltonoperators $\hat{H}$

in dieser Basis.

Aufgabe 26 (12 Punkte): *3-dim Harmonischer Oszillator (schriftlich) (4+4+4=12 Punkte)*

Der isotrope 3-dimensionale harmonische Oszillator ist durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m}\hat{p}_i^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}_i^2$$

charakterisiert.

1. Zeigen Sie, dass mit $\hat{a}_i^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{q}_i - i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}_i]$ und $\hat{a}_i := \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{q}_i + i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}_i]$ die Relationen $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j] = -\delta_{ij}$, $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0$ und $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0$ gelten, und der Hamiltonoperator die folgende Form annimmt:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \hbar\omega\left(\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \frac{1}{2}\right)$$

2. Geben Sie eine Formel für die Energieeigenwerte E_n $(n = 0, 1, \ldots)$ des Hamiltonoperators an. (Hierbei ist $n = 0$ der Grundzustand, $n = 1$ der erste angeregte Zustand usw.).
Welche Entartung hat das Energieniveau E_n?
D.h. wieviele linear unabhängige Wellenfunktionen haben dieselbe Energie E_n?
Tipp: Das Problem ist äquivalent zu der Frage, auf wieviele Arten man n Kugeln auf 3 Töpfe verteilen kann.

3. Die z-Komponente des Drehimpulsoperators ist definiert durch $\hat{L}_3 := \hat{q}_1\hat{p}_2 - \hat{q}_2\hat{p}_1$. Zeigen Sie, dass $\hat{L}_3 = i\hbar(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)$ gilt. Berechnen Sie $[\hat{H}, \hat{L}_3]$.

Aufgabe 27 (8 Punkte): *Harmonischer Oszillator im $\mathcal{E}$-Feld, Teil II (schriftlich) (1+4+1+2 Punkte)*

Auf Blatt 8 wurde der harmonischen Oszillator in einem konstanten elektrischen Feld $\mathcal{E}$ mit Hilfe einer quadratische Ergänzung gelöst. Alternativ kann das Problem auch durch eine unitäre Transformation auf den ungestörten harmonischen Oszillator zurückgeführt werden, was Inhalt dieser Aufgabe ist. Die Schrödingergleichung für den durch das elektrische Feld gestörten harmonischen Oszillator lautet:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - q\mathcal{E}\hat{x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine unitäre Transformation gibt, die den Hamiltonoperator des ungestörten harm. Oszillators $\hat{H}_{osz}$ in $\hat{H}_q$ überführt, d.h. $\hat{U}\hat{H}_{ozc}U^\dagger = \hat{H}_q$, wobei $\hat{H}_q = \hat{H} + c$, mit $c \in \mathbb{R}$ gelten soll.
Hinweise:

1. Verwenden Sie $\hat{U}(\lambda) = e^{-\lambda(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}$ bzw. $\hat{U^\dagger}(\lambda) = e^{\lambda(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}$, wobei $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ die Vernichter und Erzeuger des ungestörten harm. Oszillators sind. Zeigen Sie, dass $\hat{U}(\lambda)$ unitär ist.
2. Zeigen Sie dann $\hat{U}(\lambda)\hat{a}^\dagger\hat{U}^\dagger(\lambda) = \hat{a}^\dagger - \lambda$ und $\hat{U}(\lambda)\hat{a}\hat{U^\dagger}(\lambda) = \hat{a} - \lambda$. Verwenden Sie dazu die folgenden Kommutatoren $[\hat{a}^m, \hat{a}^\dagger] = m\hat{a}^{m-1}$ und $[(\hat{a}^\dagger)^m, \hat{a}] = -m(\hat{a}^\dagger)^{m-1}$. Welche Form nimmt dann $\hat{H}_q$ an?
3. Wählen Sie λ geschickt und bestimmen Sie so die Konstante c.

(b) Geben Sie die Energieeigenwerte des gestörten harm. Oszillators an.