Prof. Dr. Sabine Klapp
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Emely Wiegand

2. Übungsblatt – Thermodynamik & Statistische Physik

Abgabe: Do. 3. 5. 2012 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 2er/3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 4 (6 Punkte): *Momente und Kummulanten*

Die charakteristische Funktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch $f(k) = \langle \exp(ikx) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \, (ik)^n/(n!)$ gegeben. Hier sind $M_n = \langle x^n \rangle = (-i)^n (\mathrm{d}^n f/\mathrm{d}k^n)_{k=0}$ die Momente der Verteilungsfunktion. Analog lässt sich der Logarithmus von $f(k)$ gemäß $\ln f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (ik)^n/(n!)$ entwickeln. Dabei treten die sogenannten Kummulanten C_n auf.
Berechnen Sie sowohl die charakteristische Funktion als auch die Momente M_1, M_2 und alle Kummulanten C_n für die folgenden Verteilungsfunktionen:

(a) Gauß-Verteilung mit einer kontinuierlichen Variable $x \in \mathbf{R}$

$$W(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right] \tag{1}$$

(b) Poisson-Verteilung mit einer diskreten Variablen $x \in \mathbf{N}$

$$W(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) \tag{2}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte): *Der zentrale Grenzwertsatz*

In dieser Aufgabe betrachten wir eine gleichmäßige Verteilung von natürlichen Zahlen zwischen Null und $(N-1)$.

(a) Wie lautet die Verteilungsfunktion $W_1(n)$? Achten Sie auf eine korrekte Normierung, d.h. $\langle 1 \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} W_1(n) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$f(k) = \frac{1}{N} \frac{1-\mathrm{e}^{ikN}}{1-\mathrm{e}^{ik}} \tag{3}$$

die zugehörige charakteristische Funktion ist.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion den Mittelwert $\langle n \rangle$ und die Varianz $\langle (\Delta n)^2 \rangle$ der Zufallsvariablen n.

(d) Betrachten Sie nun $N_z \gg 1$ (z.B. $N_z = 20$) solcher Zufallsvariablen $n_1, n_2, \ldots, n_{N_z}$ und berechnen Sie numerisch die Verteilungsfunktion W_z für die Zufallsvariable

$$z = n_1 + n_2 + \ldots + n_{N_z}. \tag{4}$$

Achten Sie auch hier wieder auf eine korrekte Normierung der Verteilungsfunktion W_z. Berechnen Sie damit den Mittelwert und die Varianz dieser Verteilung und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 6 (3 Punkte): *Harmonischer Oszillator im Phasenraum*

Der harmonische Oszillator wird durch die Hamilton-Funktion $H(x,p) = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Trajektorie $\Gamma(t)$ und zeichnen Sie diese im Phasenraum (x–p-Ebene).

(b) Diskutieren Sie, ob der harmonische Oszillator ergodisch ist.

Vorlesung:

Mi. um 12:15 Uhr – 13:45 Uhr in EW 203,
Fr. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (mindestens einmal vorrechnen).
- Bestandene Klausur.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- M. Plischke, B. Bergersen, Equilibrium Statistical Physics, (World Scientific)
- W. Nolting, Theoretische Physik 6, (Springer)
- F. Schwabl, Statistische Mechanik, (Springer)
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Statistische Physik (Akademie Verlag)
- D. Wu, D. Chandler, Introduction to Modern Statistical Mechanics, (Oxford)
- L. E. Reichel, A Modern Course in Statistical Physics, (Edward Arnold LTD)

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Sabine Klapp	Di	12:15 – 13:00 Uhr	EW 707	23763
Arash Azhand	Do	11:00 – 12:00 Uhr	EW 627	27681
Mathias Hayn		nach Vereinbarung	EW 711	27884
Emely Wiegand	Mi	11:00 –12:00 Uhr	EW 60/61	26143