

Prof. Dr. Sabine Klapp  
 Dipl. Phys. Arash Azhand  
 Dipl. Phys. Mathias Hayn  
 Emely Wiegand

#### 4. Übungsblatt – Thermodynamik & Statistische Physik

**Abgabe: Fr. 18. 5. 2012 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 2er/3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

#### Aufgabe 10 (6 Punkte): Spin-Gitter

Wir betrachten ein System bestehen aus  $N$  Spins auf einem eindimensionalen Gitter (d.h. einer Kette). Die einzelnen Spins besitzen die Spinprojektion  $\sigma_i = \pm 1$  (parallel/antiparallel) bezüglich eines äußeren Magnetfeldes. Die Spins verschiedener Gitterplätze wechselwirken nicht miteinander, so dass die Hamilton-Funktion  $H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -h \sum_{i=1}^N \sigma_i$  lautet. Dabei ist  $h$  eine Konstante mit der Einheit einer Energie. Im mikrokanonischen Ensemble ist die Anzahl  $\Omega(E, N)$  der Zustände mit der Energie  $E$  durch

$$\ln \Omega(E, N) = N \ln N + N \ln 2 - \frac{1}{2}(N + E/h) \ln(N + E/h) - \frac{1}{2}(N - E/h) \ln(N - E/h) \quad (1)$$

gegeben.

- Zeigen Sie allgemein, dass im mikrokanonischen Ensemble  $\langle H \rangle = E$  gilt, d.h., dass der Ensemblemittelwert der Hamilton-Funktion gleich der Energie des Systems ist.
- Berechnen Sie die mittlere Anzahl  $\langle n \rangle$  von Spins parallel zum äußeren Magnetfeld.
- Wie viele Zustände mit den Energien  $E = \pm Nh$  gibt es? Wie sehen die dazugehörigen Zustände aus?
- Benutzen Sie  $\Omega(E, N)$  um die Entropie  $S$  und die Temperatur  $T$  des Systems zu berechnen.
- Stellen Sie  $S$ ,  $T$  und  $\langle n \rangle$  in Abhängigkeit von der Energie  $E$  graphisch dar. Ist die Temperatur für  $E > 0$  sinnvoll definiert?

#### Aufgabe 11 (9 Punkte): Ideales Gas

Ein ideales Gas befindet sich in einem zylindrischen Behälter der Höhe  $L$  und dem Radius  $R$ . Der Behälter dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine Längsachse. Die Hamilton-Funktion eines Gasteilchens unter Einfluss der Schwerkraft ist dann durch

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgz - \omega(x p_y - y p_x) + V_{\text{zyl}}(\mathbf{q}) \quad (2)$$

gegeben. Hier sind  $\mathbf{q} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  und  $m$  die Koordinaten, Impulse und die Masse eines Gasteilchens, und  $g$  ist Fallbeschleunigung. Das Potential  $V_{\text{zyl}}(\mathbf{q})$  begrenzt das zugängliche Volumen der Gasteilchen auf den Zylinder.

- Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme eines Teilchens sich durch

$$Z_1 = \frac{2\pi}{\beta^2 m^2 \omega^2 g \lambda_T^3} (1 - e^{-\beta mgL}) (e^{\beta \frac{m}{2} \omega^2 R^2} - 1) \quad (3)$$

ausdrücken lässt. Hier ist  $\beta = (k_B T)^{-1}$  und  $\lambda_T$  ist die thermische de Broglie-Wellenlänge.

#### 4. Übung TPV SS12

- (b) Zeigen Sie explizit für dieses System, dass die Zustandssumme für  $N$  ideale Gasteilchen durch  $Z_N = Z_1^N/N!$  gegeben ist. **Hinweis:** Die Hamilton-Funktion für  $N$  Gasteilchen lautet hier 
$$H_N = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m} + mgz_n - \omega(x_n p_{n,y} - y_n p_{n,x}) + V_{\text{Zyl}}(\mathbf{q}_n) \right].$$
- (c) Benutzen Sie  $Z_N$  im Grenzfall  $\omega, g \rightarrow 0$  und großer Teilchenzahl, um die Entropie  $S$ , die Energie  $E = \langle H \rangle$  und den Druck  $p$  des Systems zu berechnen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den entsprechenden mikrokanonischen Resultaten aus der Vorlesung.
- (d) Berechnen Sie die mittlere Höhe  $\langle z \rangle$  eines Teilchens und diskutieren Sie die Grenzfälle hoher und niedriger Temperatur.
- (e) Berechnen Sie die Teilchendichte  $n(\rho, z) = \langle \sum_{i=1}^N \delta(z - z_i) \delta(\rho - \rho_i) \rangle$  in der Höhe  $z$  und im Abstand  $\rho$  von der Mitte des Zylinders. Hierbei ist  $\rho$  die radiale Koordinate der Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$ . Stellen Sie die Dichte  $n(\rho, z)$  graphisch dar und diskutieren Sie ihr Verhalten für verschiedene Temperaturen.

**Vorlesung:** Mi. um 12:15 Uhr – 13:45 Uhr in EW 203,  
Fr. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

#### Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (mindestens einmal vorrechnen).
- Bestandene Klausur.

#### Literatur zur Lehrveranstaltung:

- M. Plischke, B. Bergersen, Equilibrium Statistical Physics, (World Scientific)
- W. Nolting, Theoretische Physik 6, (Springer)
- F. Schwabl, Statistische Mechanik, (Springer)
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Statistische Physik (Akademie Verlag)
- D. Wu, D. Chandler, Introduction to Modern Statistical Mechanics, (Oxford)
- L. E. Reichel, A Modern Course in Statistical Physics, (Edward Arnold LTD)

#### Sprechzeiten:

| Name               | Tag | Zeit              | Raum     | Tel.  |
|--------------------|-----|-------------------|----------|-------|
| Prof. Sabine Klapp | Di  | 12:15 – 13:00 Uhr | EW 707   | 23763 |
| Arash Azhand       | Do  | 11:00 – 12:00 Uhr | EW 627   | 27681 |
| Mathias Hayn       |     | nach Vereinbarung | EW 711   | 27884 |
| Emely Wiegand      | Mi  | 11:00 – 12:00 Uhr | EW 60/61 | 26143 |