Prof. Dr. Sabine Klapp
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Emely Wiegand

9. Übungsblatt – Thermodynamik & Statistische Physik

Abgabe: Do. 21. 6. 2012 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 2er/3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Das Tutorium am Dienstag von 14–16 Uhr bei Mathias wird in den Raum EW 226 verlegt.

Aufgabe 23 (4 Punkte): *Thermodynamische Information*

Betrachten Sie ein thermodynamisches System mit den Zustandsvariablen T, X und F. Hier ist T die Temperatur, X eine verallgemeinerte Auslenkung (z. B. Volumen V, magnetische Induktion B, elektrisches Feld E, ...) und F eine verallgemeinerte Kraft (z. B. Druck $-p$, Magnetisierung M, elektrische Polarisierung P, ...).

(a) Leiten Sie unter Anwendung der Gibb'schen Fundamentalform, $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E - F\mathrm{d}X$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial E}{\partial X}\right)_T = \frac{\partial E(T,X)}{\partial X} = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_X. \tag{1}$$

her. (*2 Punkte*)

(b) Leiten Sie mit dieser Beziehung und mit Hilfe der thermischen Zustandsgleichung ($F = F(T,X)$) die kalorische Zustandsgleichung ($E = E(T,X)$) in einem System bestehend aus

(1) einem idealen Gas,

(2) einem van der Waals-Gas,

(3) einem idealen Spin-$1/2$-Paramagneten (Curie-Gesetz)

her. Benutzen Sie dabei, dass die Wärmekapazität $C_X = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_X$ konstant ist. (*1 Punkt*)

(c) Zeigen Sie nun umgekehrt: Wenn für die kalorische Zustandsgleichung $E = E(T)$ gilt, dann ist die thermische Zustandsgleichung linear in T. (*1 Punkt*)

Aufgabe 24 (7 Punkte): *Von der statistischen Physik zur Thermodynamik*

In einem D-dimensionalen Volumen L^D befinden sich N zweiatomige Moleküle. Die Hamilton-Funktion eines Moleküls innerhalb dieses Volumens sei

$$H(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = \frac{\mathbf{p}_1^2+\mathbf{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}U\left|\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2\right|^2/r_0^2. \tag{2}$$

Es gilt $U > 0, r_0 > 0, L/r_0 \gg 1$. Das System hat die Temperatur T.

(a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme eines Moleküls durch $Z_1 = \left(\frac{r_0 L}{\lambda_T^2}\right)^D \left(\frac{2\pi}{\beta U}\right)^{D/2}$ gegeben ist. (*2 Punkte*)

(b) Bestimmen Sie die kalorische, $E = E(T,V,N)$, und die thermische, $p = p(T,V,N)$, Zustandsgleichung. Diskutieren Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum idealen Gas. (*2 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass für die Adiabatengleichung dieses Systems $pV^{1+1/f} = konst.$, mit $f = \frac{3D}{2}$, gilt. (*0.5 Punkte*)

Das Medium dieses Systems dient als Arbeitssubstanz in dem folgendem Kreisprozess entlang der vier Punkte 1 bis 4 im $p-V$-Diagramm: 1 $\rightarrow$ 2, isotherme Expansion vom Volumen V_1 auf das Volumen V_2; 2 $\rightarrow$ 3, isochore Abkühlung von der Temperatur T_1 auf die Temperatur T_2; 3 $\rightarrow$ 4, isotherme Kompression; 4 $\rightarrow$ 1, isochore Erwärmung.

(d) Skizzieren Sie diesen Kreizprozess im $p-V$-Diagramm. (*0.5 Punkte*)

(e) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses durch

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \bigg/ \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_1} \frac{f}{\ln \frac{V_2}{V_1}}\right) \tag{3}$$

gegeben ist. (*2 Punkte*)

Aufgabe 25 (7 Punkte): *Thermodynamische Prozesse*

In dieser Aufgabe sollen vier verschiedene thermodynamische Prozesse zwischen den Punkten A und B im $p-V$-Diagramm betrachtet werden. Der Punkt A ist durch den Druck p_A, das Volumen V_A, sowie die Temperatur T_A charakterisiert; entsprechend definiert das Tripel der Zustandsvariablen (p_B, V_B, T_B) den Punkt B. Die vier Prozesse sind durch

(1) Isobare von A nach C, Isochore von C nach B,

(2) Isotherme von A nach E, Isochore von E nach B,

(3) Adiabate von A nach B und

(4) Isochore von A nach D, Isobare von D nach B

gegeben und sollen alle quasistatisch ablaufen. Als Arbeitssubstanz dient ein ideales Gas.

(a) Skizzieren Sie alle vier Prozesse in einem $p-V$-Diagramm. (*0.5 Punkte*)

(b) Berechnen Sie explizit die Wärmemenge $\Delta Q^{(n)}$, die vom System geleistete Arbeit $\Delta W^{(n)}$, die Änderung der inneren Energie $\Delta E^{(n)}$ und die Änderung der Entropie $\Delta S^{(n)}$ entlang der vier Wege (n =1, 2, 3, 4). Drücken Sie Ihre Ergebnisse nur durch die Zustandsvariablen der Punkte A und B aus. (*4.5 Punkte*)

(c) Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. (*2 Punkte*)

Erinnerung: Die thermische und die kalorische Zustandsgleichung sind durch $pV = (C_p - C_V)T$, bzw. $E = C_V T$ gegeben. Eine Adiabatengleichung lautet $pV^\kappa = konst.$, mit $\kappa = C_p/C_V > 1$.