

Prof. Dr. Sabine Klapp
 Dipl. Phys. Arash Azhand
 Dipl. Phys. Mathias Hayn
 Emely Wiegand

10. Übungsblatt – Thermodynamik & Statistische Physik

Abgabe: Do. 28. 6. 2012 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 2er/3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 26 (8 Punkte): Virialkoeffizient

In der Virialentwicklung realer Gase geringer Dichten lautet die Zustandsgleichung (für molare Größen)

$$\frac{pv}{RT} \approx 1 - B_2 \frac{N_A}{v} \quad \text{mit dem 2. Virialkoeffizienten} \quad B_2(T) = \frac{1}{2} \int d^3r \left(e^{-\beta\varphi(\mathbf{r})} - 1 \right)$$

für ein vorgegebenes Potential $\varphi(\mathbf{r})$ (p : molarer Druck, v : molares Volumen).

- (a) Berechnen Sie $B_2(T)$ für das intermolekulare Sutherland-Potential

$$\varphi(r) = \begin{cases} +\infty & 0 < r < d, \\ -\varphi_0 \left(\frac{d}{r}\right)^m & d \leq r < +\infty, \varphi_0 > 0, m > 3 \end{cases}$$

exakt (in Form einer Reihe) und im Hochtemperaturlimes $\beta\varphi_0 \ll 1$. d ist der Durchmesser eines Teilchens.

- (b) Bringen Sie die Zustandsgleichung in die Form der Van der Waals-Gleichung für geringe Dichten und bestimmen sie das Eigenvolumen b und den Binnendruck a in Abhängigkeit von den Parametern φ_0 und d .

Hinweis: Es genügt die Reihe aus (a) nur bis zur ersten Ordnung zu betrachten. Die Gasteilchen können als kugelförmig angenommen werden. Für das Volumen eines Gasteilchens gilt also: $V_K = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3$.

Aufgabe 27 (6 Punkte): Kritischer Punkt im van der Waals-Gas

Betrachten Sie ein van der Waals-Gas mit der Teilchendichte $\rho = \frac{N}{V} = \frac{1}{v}$.

- (a) Führen Sie die neuen Zustandskoordinaten

$$\hat{p} := \frac{p - p_c}{p_c}, \quad \hat{v} := \frac{V - V_c}{V_c}, \quad \hat{t} := \frac{T - T_c}{T_c}$$

ein, wobei der Index c sich auf den kritischen Punkt bezieht. Zeigen Sie, dass die Zustandsgleichung in der Nähe des kritischen Punktes durch $\hat{p} \approx A\hat{t} - B\hat{t}\hat{v} - C\hat{v}^3$ approximiert werden kann. Bestimmen Sie die Konstanten A, B und C . (6 Punkte)

Bitte Rückseite beachten! →

10. Übung TPV SS12

(Bonus) Mit ' bezeichnen wir die flüssige und mit '' die Dampfphase. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen in der Nähe des kritischen Punktes gelten:

- Entlang einer Isothermen: $\hat{p} \sim (\rho - \rho_c)^\delta$.
- Entlang der kritischen Isochoren: $\kappa_T \sim |\hat{t}|^{-\gamma}$.
- Allgemein: $\rho' - \rho'' \sim |\hat{t}|^\beta$.

Berechnen Sie in den drei Fällen die kritischen Exponenten δ , γ bzw. β . **(4 Bonuspunkte)**

Aufgabe 28 (6 Punkte): Ising-Modell

Das Ising-Modell beschreibt die Wechselwirkung von Spins (magnetischen Momenten) auf einem Gitter. Mit diesem lässt sich die spontane Magnetisierung (Ferromagnetismus) einer magnetisierbaren Substanz untersuchen. Die Hamilton-Funktion des Ising-Modells lautet:

$$H = H(\{S_i\}) = -\frac{1}{2}J \sum_{i=1}^N (S_i S_{i+1} + S_i S_{i-1}) - h \sum_{i=1}^N S_i. \quad (1)$$

Hier ist $S_i = \pm 1$ die Spinprojektion des i -ten Gitterplatzes. Die Summen erstrecken sich über alle N Gitterplätze und das Gitter habe periodische Randbedingungen, d.h. $S_{N+1} = S_1$ (Ring von Gitterplätzen). Der Term proportional J beschreibt die Spin-Spin-Wechselwirkung und h stellt ein äußeres Magnetfeld dar.

In dieser Aufgabe behandeln wir das Ising-Modell in der sogenannten Molekularfeldnäherung. Die Grundidee der Molekularfeldnäherung ist die Aufspaltung der Zufallsvariablen eines Gitterplatzes in Erwartungswert plus Fluktuationen um diesen Erwartungswert, d.h. $S_i = \langle S_i \rangle + \delta S_i$. Des Weiteren werden Terme quadratisch in Fluktuationen auf verschiedenen Gitterplätzen vernachlässigt, d.h. $\delta S_i \delta S_j \approx 0$ für $i \neq j$.

(a) Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion in der Molekularfeldnäherung die Form

$$H = -K \sum_{i=1}^N S_i + E_0, \quad (2)$$

mit $K = 2J \langle S \rangle + h$ und $E_0 = NJ \langle S \rangle^2$ annimmt. Nehmen Sie dazu außerdem an, dass ein homogenes System vorliegt, d.h. $\langle S_i \rangle = \langle S_j \rangle =: \langle S \rangle, \forall i, j$. **(1 Punkt)**

(b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme. **(0.5 Punkte)**

(c) Berechnen Sie die Magnetisierung $M = \langle \sum_{i=1}^N S_i \rangle$ und zeigen Sie, dass für $\langle S \rangle$ die Selbstkonsistenzgleichung

$$\langle S \rangle = \tanh \left[\langle S \rangle \frac{T_c}{T} + \beta h \right], \quad (3)$$

mit $T_c = 2J/k_B$ erfüllt sein muss. **(1.5 Punkte)**

(d) Betrachten Sie den Fall ohne äußeres Feld, $h = 0$, und stellen Sie die Gleichung (3) für Temperaturen $T > T_c$, $T = T_c$ und $T < T_c$ graphisch dar. **(1 Punkt)**

(e) Berechnen Sie die freie Energie F und zeichnen Sie $F/(2NJ)$ als Funktion von $\langle S \rangle$ für Temperaturen $T > T_c$, $T = T_c$ und $T < T_c$ ohne äußeres Feld, $h = 0$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Zusammenhang mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil (d). **(2 Punkte)**