Prof. Dr. Sabine Klapp,
Arash Azhand, Mathias Hayn, Emely Wiegand

7. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Do. 07.06.2012 bis 11:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 2er-/3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.

Aufgabe 17 (3 Punkte): *Großkanonisches Ensemble*

Betrachten Sie ein System, welches sich in Kontakt mit einem Wärmebad und einem Teilchenreservoir befindet von der quantenstatistischen Perspektive.

(a) Bestimmen Sie die Nebenbedingungen, unter denen die Entropie maximal wird. *(1 Punkt)*

(b) Benutzen Sie das Prinzip der maximalen Entropie, um den statistischen Operator des Systems herzuleiten. *(2 Punkte)*

Aufgabe 18 (5 Punkte): *Quantenoszillatoren*

Betrachten Sie ein System aus N unabhängigen, quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren, alle mit der gleichen Frequenz ω. Jeder dieser Oszillatoren besitze einen Eigenzustand $|n_i\rangle$ (mit $i = 1, \cdots, N$) und Eigenenergien $\epsilon_i = \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right)$, mit $n_i = 0, 1, 2, \cdots$.

(a) Wie sieht der Hamiltonian $\hat{H}$ des vollen Systems aus? Wie sehen die zugehörigen Eigenwerte und Eigenzustände aus? *(1 Punkt)*

(b) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme des Gesamtsystems. *(3 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie die innere Energie $E = \langle\hat{H}\rangle$ und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 12(b). Was passiert mit E für $T \to 0$ und $T \to \infty$? *(1 Punkt)*

Aufgabe 19 (4 Punkte): *Wigner-Transformation*

Es läßt sich jedem quantenmechanischen 1-Teilchen-Operator $\hat{O}\left(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}\right)$ eine klassische Observable $O_w\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right)$ vermittels der sog. "Wigner-Transformation" zuordnen, falls die Matrixelemente $\langle\mathbf{r}'|\hat{O}|\mathbf{r}\rangle$ in der Ortsdarstellung bekannt sind:

$$O_w\left(\mathbf{R},\ \mathbf{p}\right) = \int d^3\mathbf{r}\langle\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}|\hat{O}|\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\rangle \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right\}. \tag{1}$$

Die Rücktransformation zu (2) ist die sog. "Weyl'sche Quantisierungsvorschrift". Diese erlaubt es, jeder klassischen Observable $O_w\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right)$ Matrixelemente $\langle\mathbf{r}'|\hat{O}|\mathbf{r}\rangle$ eines quantenmechanischen Operators $\hat{O}$ in Ortsdarstellung zuzuordnen:

$$\langle\mathbf{r}'|\hat{O}|\mathbf{r}\rangle = \frac{1}{h^3}\int d^3p\, O_w\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}' + \mathbf{r}\right),\ \mathbf{p}\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}\right)\right\}. \tag{2}$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

7. Übung TPIV SS12

Zeigen Sie, dass

(a) die Wigner Transformation (2) der Matrixelemente $\langle \mathbf{r}'|\hat{\rho}|\mathbf{r}\rangle$ des quantenmechanischen Dichteoperators für ein freies Teilchen im Volumen V,

$$\langle \mathbf{r}'|\hat{\rho}|\mathbf{r}\rangle = \frac{1}{V}\exp\left\{-\frac{\pi}{\lambda^2}\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}\right)^2\right\},$$

die klassische, kanonische Phasenraumdichte $\rho\left(\mathbf{r},\,\mathbf{p}\right)$ ergibt. *(2 Punkte)*

(b) die Weyl'sche Quantisierungsvorschrift (3), angewandt auf die klassische, kanonische Phasenraumdichte, zu den Matrixelementen $\langle \mathbf{r}'|\hat{\rho}|\mathbf{r}\rangle$ des quantenmechanischen Dichteoperators führt. *(2 Punkte)*

Vorlesung:

Mi. um 12:15 Uhr – 13:45 Uhr in EW 203,
Fr. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (mindestens einmal vorrechnen).
- Bestandene Klausur.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- M. Plischke, B. Bergersen, Equilibrium Statistical Physics, (World Scientific)
- W. Nolting, Theoretische Physik 6, (Springer)
- F. Schwabl, Statistische Mechanik, (Springer)
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Statistische Physik (Akademie Verlag)
- D. Wu, D. Chandler, Introduction to Modern Statistical Mechanics, (Oxford)
- L. E. Reichel, A Modern Course in Statistical Physics, (Edward Arnold LTD)

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Sabine Klapp	Di	12:15 – 13:00 Uhr	EW 707	23763
Arash Azhand	Do	11:00 – 12:00 Uhr	EW 627	27681
Mathias Hayn		nach Vereinbarung	EW 711	27884
Emely Wiegand	Mi	11:00 –12:00 Uhr	EW 60/61	26143