Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

25. April 2013

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Donnerstag 09.05.13 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): ***Energie-Impuls-Tensor und Feldgleichungen aus dem Variationsprinzip***

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes mit Quellen im Riemannschen Raum lautet:

$$L_M = \sqrt{-g}\left(\frac{c}{16\pi}F_{\kappa\mu}F_{\lambda\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu} - j_\kappa g^{\kappa\lambda}A_\lambda\right). \tag{1}$$

Hierbei sind A_κ das Vierer-Potential, j^κ der Strom und $F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}$ der (anitsymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor.

a) Bestimmen Sie durch Ausführung der Variation:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(L_M)}{\delta g_{\alpha\beta}} \tag{2}$$

den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Warum müssen die Christoffelsymbole bei dieser Variation nicht beachtet werden? Achtung es muss ein symmetrischer Tensor herauskommen.

b) Leiten Sie durch Variation nach den Vierer-Potentialen A_α die **kovarianten** inhomogenen Maxwellgleichungen ab. Da dieses Problem mit den zugehörigen Lagrange-Gleichungen äquivalent ist, können diese auch benutzt werden. **Hinweis**: Benutzen Sie die Identität $\Gamma^\kappa_{\kappa\tau} = \frac{g_{,\tau}}{2g}$.

c) Beweisen Sie mit der in b) erhaltenen kovarianten inhomogenen Maxwellgleichung, dass die **kovariante** Ladungserhaltung ${j^\kappa}_{;\kappa} = 0$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Divergenz des in a) abgeleiteten Energie-Impuls-Tensor und vereinfachen Sie diese weitestgehend. Diskutieren Sie das Ergebnis.