Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

11. April 2013

1. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Donnerstag 25.04.13 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Instabile Lichtorbits in der Kerr-Raumzeit*

Im Folgenden soll eine weitere exakte Vakuum-Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen betrachtet werden, die Kerr-Lösung. Sie beschreibt das Gravitationsfeld eines rotierenden Schwarzen Lochs. Das Linienelement der Kerr-Raumzeit ist gegeben durch

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 + 4ma\frac{rsin^2\Theta}{\rho^2}dtd\phi - \tag{1}$$
$$-\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\Theta^2 - sin^2\Theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2mr}{\rho^2}a^2 sin^2\Theta\right) d\phi^2,$$

worin $\rho^2 = r^2 + a^2cos^2\Theta$, $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ sind und m die Masse und a den Drehimpuls beschreiben.

a) Betrachten Sie den Spezialfall der Bewegung in der Äquatorialebene $\Theta = \pi/2$ und $\dot{\Theta} = 0$. Warum handelt es sich in diesem Fall um eine wesentliche Einschränkung der betrachteten Bahnen im Gegensatz zur Behandlung der Schwarzschild-Lösung? Was passiert für den Fall, dass $a = 0$ gilt?

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion für den oben genannten Spezialfall auf. Welche Koordinaten sind zyklisch? Leiten Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für t, ϕ ab. Wie in der Schwarzschild-Raumzeit erhält man hier erste Integrale der Bewegung. Bezeichnen Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen bitte mit E und l. Trennen Sie die Bewegungsgleichungen für t und ϕ.

c) Betrachten Sie nun Licht als Testteilchen und eleminieren Sie $\dot{t}$ und $\dot{\phi}$ aus der Bewegungsgleichung für r. Werten Sie diese Gleichung und deren erste Ableitung für $\dot{r} = 0$ und $\ddot{r} = 0$ aus (dies sind die Stabilitätsbedingungen). An dieser Stelle kann man für den Fall $a = 0$ (Schwarzschild) den instabilen Photonenorbit bestimmen.
Hinweis: Es handelt sich um Bestimmungsgleichungen für den Wert von r auf denen die Lichtorbits instabil sind.

d) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen den Erhaltungsgrößen und den Parametern der Kerr-Metrik her und führen Sie für die beiden Erhaltungsgrößen den so genannten Stoßparameter $D = l/E$ ein.
Hinweis: Sie erhalten dann eine kubische Gleichung in D, die sich durch die Substitution $y = D + a$ in eine einfache Form bringen läßt.

e) Lösen Sie die kubische Gleichung für die Werte $a = m$ und $a = -m$. Bestimmen Sie jeweils den instabilen Photonenorbit in Abhängigkeit von m.