Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
PD Dr. Kathy Lüdge, Judith Lehnert, Andrea Vüllings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Jurijs Grecenkovs

10. Übungsblatt – Mathematische Methoden

Abgabe: Mo. 24.06.2013 bis 14:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 28 (4 Punkte): *Zylinder-,Kugelkoordinaten* **(mündlich)**

(a) Stellen Sie folgende Skalarfelder $\phi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ in Zylinder- und in Kugelkoordinaten dar. Gibt es für die verschiedenen Felder besonders geeignete Koordinaten?

$$\phi_1(x,y,z) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1}$$

$$\phi_2(x,y,z) = -\gamma \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{2}$$

$$\phi_3(x,y,z) = x \tag{3}$$

$$\phi_4(x,y,z) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} \tag{4}$$

(b) Berechnen Sie für beide Koordinatensysteme (Zylinder- und Kugelkoordinaten) die Tangenten-Einheitsvektoren (das begleitende Dreibein $\underline{e}_{u_i}$) sowie die metrischen Koeffizienten.

Aufgabe 29 (5 Punkte): *Bahnkurve im Schwimmbad* **(0.5+1+0.5+1.5+1.5 schriftlich)**

Angela sieht im Schwimmbad eine Rutsche in der Form einer Schraubenlinie. Als angehende Physikerin möchte sie nichts dem Zufall überlassen. Vor der Rutschpartie überlegt sie sich daher Folgendes: „*Wenn ich, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, mit der Kreisfrequenz ω auf dieser Schraubenlinie mit dem Radius R um die z-Achse herumrutsche, bedeutet dies, dass die Projektion der Bahnkurve auf die x,y-Ebene eine Kreisbahn mit dem Radius R ist. Falls meine Geschwindigkeit in z-Richtung den Betrag v_z hat und ich zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $\vec{P} = (R, 0, 0)$ passiere kann ich mir meine Bahn im Vorhinein überlegen.*“
Sie können nun Angela dabei helfen:

(a) Geben Sie die Bahnkurve für diese Bewegung an.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von Angela und geben Sie ihre Komponenten bezüglich einer Basis aus Zylinderkoordinaten an.

(c) Wo hat Angela die maximale Geschwindigkeit in x-Richtung?

(d) Berechnen Sie die in der Zeit t zurückgelegte Weglänge $s(t) = \int_0^t |\frac{d\underline{r}(t')}{dt'}|dt'$ und drücken Sie $\vec{r}$ als Funktion von s aus. Wie lang ist der zurückgelegte Weg nach einem vollen Umlauf auf der Schraubenlinie?

(e) Berechnen Sie die Tangenten-, Normalen- und Binormalen-Einheitsvektoren $\hat{\underline{t}}$, $\hat{\underline{n}}$ und $\hat{\underline{b}}$ entlang der Bahnkurve, die das begleitende Dreibein bilden.

Hinweis: Die Tangenten-,Normalen- und Binormalen-Einheitsvektoren sind wie folgt definiert:

$$\hat{\underline{t}} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}, \quad \hat{\underline{n}} = \frac{d\underline{t}(s)}{ds}/|\frac{d\underline{t}(s)}{ds}|, \quad \hat{\underline{b}} = \underline{t} \times \underline{n}$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 30 (5 Punkte): *$\delta-$Distribution* **(1.5+1.5+1+0.5+0.5 schriftlich)**

Die $\delta-$Distribution, manchmal auch salopp $\delta-$Funktion genannt, ist ein lineares Funktional auf dem Funktionenraum. Man kann sie durch ihre Wirkung auf Funktionen f definieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0)$$

Die Funktionen f müssen stetig sein und für $|x| \to \infty$ hinreichend schnell abfallen. Die $\delta-$Distribution ist keine Funktion. Eine Funktion, die diese Eigenschaft erfüllen würde, müßte überall außer bei $x = 0$ Null sein und bei $x = 0$ "irgendwie" unendlich sein. Tatsächlich kann die $\delta-$Distribution durch verschiedene Funktionenscharen g_ϵ ($\epsilon \to 0$) angenähert werden. Dabei zeigt man dann, dass eine solche Funktionenschar im Grenzwert "unter dem Integral" gegen die $\delta-$Distribution konvergiert für jede Testfunktion $f(x)$, die beliebig oft differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalls Null ist.

a) Zeigen Sie, dass $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ gegen die $\delta-$Distribution konvergiert.

b) Zeigen Sie unter zur Hilfenahme der Darstellung der $\delta-$Distribution durch eine Funktionenschar g_ε, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) \mathrm{d}x = -f'(0)$.

c) Zeigen Sie, wie in b), dass $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(cx) f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \mathrm{d}x$,
also dass $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$.

d) Berechnen Sie, wie in b), $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x$.

e) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $\delta(x - x_0)$.

Allgemeine Informationen:

- Klausur: 12.07.13, Raum H 0104, Uhrzeit 8:00-10:00
- Aktuelle Informationen werden immer auf der Homepage bekannt gegeben: (*http://www.itp.tu-berlin.de/?mm13*).
- Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Eckehard Schöll		n.V.	EW 735	23500
PD Dr. Kathy Lüdge	Di	14:00–15:00 Uhr	EW 741	23002
Dipl.-Phys. Judith Lehnert	Do	15:00–16:00 Uhr	ER 246	29048
M. Sc. Andrea Vüllings	Fr	14:00–15:00 Uhr	EW 632	22088
Samuel Brem	Mi	14:00–15:00 Uhr	EW 060	26143
Zeynep Cetinkaya	Fr	11:00–12:00 Uhr	EW 060	26143
Jurijs Grecenkovs	Mi	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143