

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD  
 PD Dr. Kathy Lüdge, Judith Lehnert, Andrea Vüllings,  
 Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Jurijs Grecenkovs

### 3. Übungsblatt – Mathematische Methoden

**Abgabe: Mo. 06.05.2013 14**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

**Aufgabe 7: Komplexe Zahlen (mündlich 2+2=4 Punkte)**

- (a) Berechnen Sie  $z \in \mathbb{C}$  und geben Sie das Ergebnis als Summe von Real- und Imaginärteil sowie in Polarform an.

(1.)  $z = (1 + i)(1 - i)$

(3.)  $z = i^i$

(2.)  $z = (1 + i)/(1 - i)$

(4.)  $z^3 = i$

- (b) Beweisen Sie die Euler'sche Formel  $\exp(i\phi) = \cos \phi + i \sin \phi$  mithilfe der komplexen Exponentialreihe.

**Aufgabe 8 (6 Punkte): Freier Fall und Fallschirmsprung (schriftlich, 2+1+2+1=6 Punkte)**

Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug ab. Seine Beschleunigung  $\frac{dv}{dt}$  und Geschwindigkeit  $v$  werden nun durch die Gewichtskraft  $F_g = mg$  ( $g$  ist die Erdbeschleunigung) und die Reibungskraft  $F_R = -6\pi r \eta_{Luft} v$  (Stokes'sches Gesetz) bestimmt. Dabei ist seine Masse  $m = 75 \text{ kg}$  und sein effektiver Radius  $r = 1 \text{ m}$  (ohne Fallschirm). Die dynamische Viskosität von Luft ist:  $\eta_{Luft} = 17.1 \mu \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

- (a) Leiten Sie allgemein eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit her und berechnen Sie die allgemeine Lösung  $v(t)$  ausgehend von der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Diskutieren Sie, ob ein schwerer Ball unter diesen Voraussetzungen schneller fällt als ein leichter Ball gleicher Größe.
- (b) Der Fallschirmspringer springt aus dem Flugzeug ( $v(t_0) = 0$ ). Wie schnell erreicht der Fallschirmspringer nach dem Sprung aus dem Flugzeug seine Endgeschwindigkeit  $v_{end}$  (bis auf 5% Toleranz)? Wie groß ist diese? Ist das realistisch?
- (c) Setzen Sie statt Stokes'scher Reibung die bei hohen Geschwindigkeiten geltende Newtonreibung an:  $F_R = -kv^2$ , mit der Konstante  $k = 0.5c_w A \rho_L$  ( $k > 0$ ), mit der Fläche des Springers  $A = 1 \text{ m}^2$ , der Luftdichte  $\rho_L = 1.3 \text{ kg/m}^3$  und dem experimentell bestimmbar Wert  $c_w = 0.3$  und lösen Sie die Differentialgleichung.
- (d) Wie schnell erreicht der Fallschirmspringer mit diesem Ansatz nach dem Sprung aus dem Flugzeug seine Endgeschwindigkeit  $v_{end}$  (bis auf 5% Toleranz)? Wie groß ist diese? Ist das realistisch?

**Bitte Rückseite beachten! →**

### 3. Übung SoSe13

#### **Aufgabe 9 (4 Punkte):** *Logistisches Gesetz*(schriftlich, 2+1+1=4 Punkte)

Das *logistische Gesetz* beschreibt in einem einfachen Modell die Wachstumsdynamik einer Population mit Berücksichtigung der Konkurrenz zwischen den Individuen. Die zeitliche Änderung der Populationsgröße  $y(t)$  hängt in diesem Modell zu jedem Zeitpunkt  $t$  nur von der Geburtenrate  $G(t)$  und der Konkurrenz  $K(t)$  ab:  $\dot{y}(t) = G(t) - K(t)$ . Die Geburtenrate sei proportional zur Anzahl der Individuen. Für die Konkurrenz soll angenommen werden, dass sie aus der Interaktion jedes Individuums mit allen anderen Individuen entsteht. Daher wird sie als proportional zum Quadrat der Populationsgröße angesetzt. Bitte berücksichtigen Sie, dass Geburten die Anzahl der Individuen erhöhen, während die Konkurrenz die Population vermindern sollte!

- Geben Sie die Differentialgleichung zur Bestimmung der Populationsgröße an und finden Sie die allgemeine Lösung dieser Ratengleichung (Startwert  $y(t = t_0) = y_0$ ). Tipp: Das Ergebnis sollte die Form  $y(t) = \frac{a}{be^{c(t-t_0)} + d}$  haben, wobei  $a, b, c, d$  Konstanten sind!
- Bestimmen Sie  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ . Skizzieren Sie den Verlauf Ihrer Lösung. Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung für den Startwert  $y_0$ .
- Wie verhält sich die Funktion asymptotisch für  $t$  in der Umgebung von  $t_0$  wenn  $y_0 \ll 1$ ?

#### Allgemeine Informationen:

- Klausur: 12.07.13, Raum H 0104, Uhrzeit 8:00-10:00
- Aktuelle Informationen werden immer auf der Homepage bekannt gegeben: (<http://www.itp.tu-berlin.de/?mm13>).

- Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. Eckehard Schöll		n.V.	EW 735	23500
PD Dr. Kathy Lüdge	Di	14:00–15:00 Uhr	EW 741	23002
Dipl.-Phys. Judith Lehnert	DO	15:00–16:00 Uhr	ER 246	29048
M. Sc. Andrea Vüllings	Fr	14:00–15:00 Uhr	EW 632	22088
Samuel Brem	Mi	14:00–15:00 Uhr	EW 060	26143
Zeynep Cetinkaya	Fr	11:00–12:00 Uhr	EW 060	26143
Jurijs Grechenkova	Mi	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143