Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
PD Dr. Kathy Lüdge, Judith Lehnert, Andrea Völlings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Jurijs Grecenkovs

6. Übungsblatt – Mathematische Methoden

Abgabe: Mo. 27.05.2013 bis 14:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 16 (4 Punkte): *Hauptachsentransformation* **(mündlich 0.5+1.5+1.5+0.5)**

Betrachten Sie die Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung in einer Richtung (x sei die Auslenkung) ohne externe Kraft (m sei die Masse, β der Reibungskoeffizient und D die Federkonstante).

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + Dx = 0$$

a) Formulieren Sie dieses System als Vektorgleichung in der Form: $\dot{\underline{r}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{r}$.

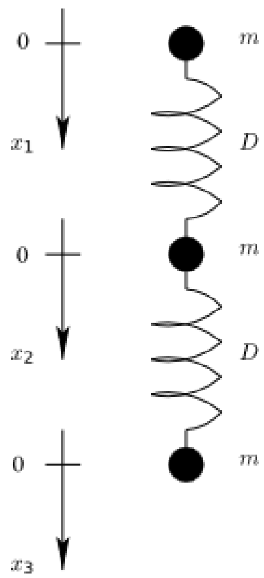
b) Sei $\underline{\underline{T}}$ die Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ sind. Führen Sie eine *Hauptachsentransformation* durch, indem Sie in der Vektorgleichung in a) den Vektor $\underline{r}$ durch $\underline{r} = \underline{\underline{T}}\ \underline{\rho}$ ersetzen und die resultierende Gleichung nach $\dot{\underline{\rho}}$ auflösen.

c) Das Ergebnis aus b) sind nun 2 nicht miteinander gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung. Lösen sie diese und geben Sie anschließend die allgemeine Lösung für $\underline{r}$ an!

d) Warum versagt das Verfahren im Falle einer zeitabhängigen Reibung (z.B. durch Abkühlung eines Schmierfetts)?

Aufgabe 17 (5 Punkte): *Gekoppelte Massen* **(schriftlich 1+3+1=5 Punkte)**

Betrachten Sie das abgebildete System aus drei gleichen Massen m, die sich nur auf einer vorgegebenen Geraden bewegen können und mit zwei gleichen Federn der Federkonstante D aneinander gekoppelt sind.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkungen x_i der 3 Massen aus ihren jeweiligen Ruhelagen auf und formulieren Sie diese als $\ddot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t)$ wobei $\underline{x} := (x_1, x_2, x_3)$.

b) Wenn das System eine Schwingung mit einer Eigenfrequenz ω durchführt, können wir schreiben $\underline{x}(t) = \underline{\xi}\ e^{i\omega t}$ mit $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Lösen Sie mit diesem Ansatz das Eigenwertproblem und bestimmen Sie $\underline{\xi}$ für alle drei Eigenfrequenzen.

c) Beschreiben Sie in wenigen Worten, wie sich das System in den drei Eigenzuständen jeweils bewegt.

Tipp: Die Frequenzen der Eigenschwingungen sollten folgendes Ergebnis liefern: $\omega^2 \in \{0, \frac{D}{m}, \frac{3D}{m}\}$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

6. Übung SoSe13

Aufgabe 18 (5 Punkte): *Hauptträgheitsachsen* **(schriftlich 1+1.5+1.5+1=5 Punkte)**

Für ein Ensemble von N relativ zueinander fixierten Massenpunkten kann man den *Trägheitstensor* $\underline{\underline{I}}$ definieren, welcher das Trägheitsmoment J eines solchen starren Gerüsts für eine gegebene Rotationsachse durch den Ensembelschwerpunkt zu berechnen erlaubt. Die Richtung der Rotationsachse sei durch den normierten Vektor $\underline{\omega}$ gegeben.

$$J = \underline{\omega}^T \underline{\underline{I}}\, \underline{\omega} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{I}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

Dabei sind x_i, y_i und z_i die Ortsvektorkomponenten und m_i die Masse des i-ten Teilchens. Als (schlechtes) Modell eines Wassermoleküls betrachten Sie bitte in einem kartesischen Koordinatensystem zwei Wasserstoffatome an den Orten (1 Å,0,0) und (-1 Å,0,0) mit jeweils der Masse u und ein Sauerstoffatom am Ort (0,0,1 Å) mit der Masse $16u$.

a) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an und verschieben Sie dann das Molekül so, dass der Schwerpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

b) Berechnen Sie mit den neuen Orten den Trägheitstensor $\underline{\underline{I}}$.

c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente (Eigenwerte von $\underline{\underline{I}}$) und die Hauptträgheitsachsen (Eigenvektoren von $\underline{\underline{I}}$) und tragen Sie deren Richtung in die Skizze ein.

d) Um welche der Hauptträgheitsachsen rotiert das Molekül bevorzugt, d.h mit größtem Trägheitsmoment J?

Hinweis: Versuchen Sie bitte, alle Zahlen als Brüche darzustellen!

Allgemeine Informationen:

- Klausur: 12.07.13, Raum H 0104, Uhrzeit 8:00-10:00
- Aktuelle Informationen werden immer auf der Homepage bekannt gegeben: (*http://www.itp.tu-berlin.de/?mm13*).
- Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Eckehard Schöll		n.V.	EW 735	23500
PD Dr. Kathy Lüdge	Di	14:00–15:00 Uhr	EW 741	23002
Dipl.-Phys. Judith Lehnert	Do	15:00–16:00 Uhr	ER 246	29048
M. Sc. Andrea Vüllings	Fr	14:00–15:00 Uhr	EW 632	22088
Samuel Brem	Mi	14:00–15:00 Uhr	EW 060	26143
Zeynep Cetinkaya	Fr	11:00–12:00 Uhr	EW 060	26143
Jurijs Grecenkovs	Mi	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143