Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
PD Dr. Kathy Lüdge, Judith Lehnert, Andrea Vüllings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Jurijs Grecenkovs

# 8. Übungsblatt – Mathematische Methoden

**Abgabe: Mo. 10.06.2013 bis 14:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**
*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.*

**Aufgabe 22 (4 Punkte):** *Partielle Ableitungen* **(mündlich, 2+2=4 Punkte)**

Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x, y) = \sin(\alpha x y) \exp\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$,

(b) $g(x, y, z) = -\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

*Hinweis:* Die Kettenregel, die Sie bereits für die gewöhnliche Ableitung kennen, gilt analog auch für partielle Ableitungen.

**Aufgabe 23 (4 Punkte):** *Homogene Funktionen* **(schriftlich, 1+1+2=4 Punkte)**
Eine Funktion $L(x, y)$ zweier Variablen $x$ und $y$ heißt homogen vom Grad $n$, wenn

$$L(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n L(x, y),$$

wobei $\alpha$ ein beliebiger konstanter Parameter ist.

(a) Leiten Sie unter Verwendung der obigen Definition die partielle Differentialgleichung,

$$x \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = nL(x, y),$$

für homogene Funktionen vom Grad $n$ her. Bilden Sie dazu die Ableitung der obigen Gleichung nach dem Parameter $\alpha$ und setzen Sie anschließend $\alpha = 1$.

Wir wollen nun mit Hilfe der resultierenden partiellen Differentialgleichung eine wichtige Klasse von homogenen Funktionen bestimmen.

(b) Verwenden Sie zur Lösung der Differentialgleichung den Ansatz $L(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ (Separationsansatz) und bringen Sie die resultierende Gleichung in die Form

$$\frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = n - \frac{y}{g(y)} \frac{dg(y)}{dy}.$$

Überzeugen Sie sich, dass beide Seiten der Gleichung für sich genommen schon konstant sein müssen.

(c) Lösen Sie nun die – sich aus der letzen Überlegung ergebenen – gewöhnlichen Differentialgleichungen für $f(x)$ und $g(y)$ durch Trennung der Variablen und bestimmen Sie so die allgemeine Form homogenener Funktionen vom Grad $n$ der Form $L(x, y) = f(x) \cdot g(x)$. Überzeugen Sie sich noch einmal, dass Ihre Lösung tatsächlich die Definition homogener Funktionen erfüllt.

**Bitte Rückseite beachten!**⟶

**Aufgabe 24 (6 Punkte):** *Fourier-Reihen* **(schriftlich, 4+2=6 Punkte)**
*Eine Funktion $f$ kann nicht nur durch eine Taylor-Reihe approximiert werden (also mit Polynomen von $x$, welche eine nicht-orthonormale Basis im Funktionenraum darstellen), sondern auch mittels trigonometrischer Funktionen (welche eine Orthonormalbasis bilden). Die letztere Entwicklung nennt man Fourier-Reihe. Dazu vorab einige Definitionen:*

Eine Funktion $f$ heißt *periodisch* mit der Periode $2a \neq 0$, wenn gilt:

$$f(x+2a) = f(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Eine $2a$-periodische Funktion $f$ kann dann eindeutig bestimmt werden durch ihr Verhalten auf einem beliebigen Intervall der Länge $2a$. Es werden definiert:

*Fourierkoeffizienten*

$$c_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ik_n x}dx, \quad k_n = n\frac{\pi}{a}$$

*Fourierreihe von $f$*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}.$$

Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-1,1] \qquad \text{und dabei sei } f(x+2) = f(x)$$

und

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; -2 \leq t < -1, \\ 2 & \text{für } \; -1 \leq t < 1, \\ 0 & \text{für } \quad 1 \leq t < 2 \end{cases} \qquad \text{dabei sei } g(t+4) = g(t).$$

1. Berechnen Sie die vollständige Fourier-Reihe von $f$ und $g$.
2. Plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl sowohl $f$ und $g$ und die entsprechnede $N$-te Partialsumme der Fourier-Reihe für $N = \{1, 2, 3, 20\}$.

## Allgemeine Informationen:

- Klausur: 12.07.13, Raum H 0104, Uhrzeit 8:00-10:00
- Aktuelle Informationen werden immer auf der Homepage bekannt gegeben: (*http://www.itp.tu-berlin.de/?mm13*).
- Sprechzeiten:

| **Name** | **Tag** | **Zeit** | **Raum** | **Tel.** |
|---|---|---|---|---|
| Prof. Dr. Eckehard Schöll | | n.V. | EW 735 | 23500 |
| PD Dr. Kathy Lüdge | Di | 14:00–15:00 Uhr | EW 741 | 23002 |
| Dipl.-Phys. Judith Lehnert | Do | 15:00–16:00 Uhr | ER 246 | 29048 |
| M. Sc. Andrea Vüllings | Fr | 14:00–15:00 Uhr | EW 632 | 22088 |
| Samuel Brem | Mi | 14:00–15:00 Uhr | EW 060 | 26143 |
| Zeynep Cetinkaya | Fr | 11:00–12:00 Uhr | EW 060 | 26143 |
| Jurijs Grecenkovs | Mi | 12:00–13:00 Uhr | EW 060 | 26143 |