Organisatorische Vorbemerkungen zur LV $\rightarrow$ homepage
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2016/pflichtveranstaltungen_bachelorstudium/mm16/

1. Funktionen einer reellen Variablen

1.1 Grafische Darstellung im kartesischen Koordinatensystem

Eine Funktion y = f(x) lässt sich als Kurve im rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen.

Einfache Änderungen des Funktionsverlaufs / Kurvenbilds der Funktion f(x):

f(-x) $\rightarrow$ spiegele f(x) an y-Achse

- f(x) $\rightarrow$ spiegele f(x) an x-Achse

- f(-x) $\rightarrow$ spiegele f(x) am Koordinatenursprung

f(x-a) $\rightarrow$ verschiebe f(x) um a nach rechts

f(x)+b $\rightarrow$ verschiebe f(x) um b nach oben

Die Funktion f(x) heißt gerade, wenn $f(x) = f(-x)$; sie heißt ungerade, wenn $f(x) = -f(-x)$ gilt.
Die gerade Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, die ungerade symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Jede Funktion f(x) ist eindeutig als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellbar

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right]}_{\text{ungerade}} .$$

• <u>Umkehrfunktion, inverse Funktion</u>

Bei eineindeutiger Zuordnung der Elemente des Werte- und des Definitionsbereichs von $y = f(x)$ lässt sich x als Funktion von y auffassen: $x = f^{-1}(y) = g(y)$.
$x = g(y)$ heißt Umkehrfunktion von $y = f(x)$, oder die zu $y = f(x)$ inverse Funktion.

■ Aus $y = e^x$ wird $x = \ln y$. Bezeichnen wir die abhängige Variable wieder mit x, sind Exponentialfunktion $y = e^x$ Logarithmusfunktion $y = \ln x$ invers zueinander; es gilt $e^{\ln x} = x$.

Den Kurvenverlauf von $y = \ln x$ erhalten wir aus dem der Funktion $y = e^x$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$.

■ Im Fall der Parabel $y = x^2$ entsprechen einem y- zwei unterschiedliche x-Werte, die eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen des Definitions- und des Wertebereiches ist nur für positive x oder für negative x gegeben. Die beiden Äste der Parabel sind also lediglich einzeln invertierbar (unabhängige Variablen mit x bezeichnet):

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{x} \text{ für } 0 \le x < \infty$$

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad y = -\sqrt{x} \text{ für } -\infty < x \le 0$$

AUFGABEN:
1) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf von $y = e^x$ und $y = \ln x$; ebenso von $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$.
2) Bei Bedarf, die graphischen Darstellungen wichtiger Funktionen wiederholen, vgl. z.B. das Kapitel "Bilder elementarer Funktionen" im Bronstein (Kap. 1.2, Teubner, 1981).

1.2 Stetigkeit einer Funktion y = f(x)

Wenn es zu jeder beliebig vorgegeben Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, dann ist f an der Stelle x = a stetig, vorausgesetzt, a gehört zum Definitionsbereich der Funktion f(x).
Man kann zeigen: Eine Funktion f(x), die in einer Umgebung x = a definiert sei, ist in a genau dann (also dann und nur dann) stetig, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt – der Grenzwert muss existieren und mit dem Funktionswert an der Stelle a übereinstimmen. Grob vereinfacht: Bei stetigen Funktionen ziehen "kleine" Änderungen der Abszissenwerte "kleine" Änderungen der entsprechenden Funktionswerte nach sich.

• Ist f(x) in x = a nicht stetig, dann heißt x = a <u>Unstetigkeitsstelle</u> der Funktion f(x).
Unstetigkeitsstellen können verschiedenen Ursachen haben, z.B.
(i) f(x) ist im Punkt x = a nicht definiert.
(ii) $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$,
(iii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert nicht,

(iv) Funktionsverlauf ins Unendliche (Funktion divergiert in x = a; z.B. Polstellen), $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

u.a.

■ Gebrochen rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p(x) und q(x) Polynome in x mit reellen Koeffizienten sind, besitzen Polstellen bei x = a, wenn $p(a) \neq 0$, $q(a) = 0$. Verschwinden Zähler und Nenner gleichzeitig bei x = a, muss die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners größer als die des Zählers sein.

(v) Sprung der Funktion f(x) beim Durchlaufen des Punktes x = a ,

■ $y = e^{\frac{1}{x-a}}$ besitzt einen unendlicher Sprung an der Stelle x = a, da

$$\lim_{x \to a-0} e^{\frac{1}{x-a}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = \infty .$$

■ Die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ hat einen endlichen Sprung an der Stelle x = 1, da $f(1-0) = 1$ und $f(1+0) = 0$.

■ Die Funktion $y = f(x) = \tan x$ divergiert bei $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, wobei

$$\tan\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - 0\right) = \infty, \ \tan\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty .$$

1.3 Differenzierbarkeit von Funktionen. Ableitung einer Funktion y = f(x)

• Definition und Schreibweise: Ableitung an der Stelle x ist

$$y' \equiv \frac{df}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon},$$

vorausgesetzt, der Grenzwert existiert. Anschauliche geometrische Bedeutung der Ableitung: Der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ entspricht dem Übergang der Sekanten zwischen den Punkten $P_1 = (x + \varepsilon, f(x + \varepsilon))$ und P = (x, f(x)) in die Tangente an die Kurve f(x) im Punkt P. Es gilt $f'(x) = \tan\alpha$, wobei α der Tangentenneigungswinkel ist.

• Differenzierbarkeit: y = f(x) ist differenzierbar in x = a genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differentialquotienten existieren und einander gleich sind. Ist y = f(x) an der Stelle x = a differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Beispiele:

■ $$\frac{d}{dx}x^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[(x+\varepsilon)^3 - x^3\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^3+3x^2\varepsilon+3x\varepsilon^2+\varepsilon^3-x^3}{\varepsilon} = 3x^2$$

■ $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x+\varepsilon}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x-(x+\varepsilon)}{\varepsilon(x+\varepsilon)x}\right] = -\frac{1}{x^2}$$

■ "Produktregel": $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$, denn

$$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[f(x+\varepsilon)\,g(x+\varepsilon)\underbrace{-f(x)g(x+\varepsilon)+f(x)\,g(x+\varepsilon)}_{\text{"nahrhafte Null"}}-f(x)\,g(x)\right]$$

also

$$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = \frac{df(x)}{dx}\,g(x) + f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}$$

Sind die Funktionen f(x) und g(x) in x_0 n-fach differenzierbar, dann ist auch die Funktion $f(x)\cdot g(x)$ an der Stelle x_0 n-fach differenzierbar und es gilt

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)\right|_{x=x_0} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)\Big|_{x=x_0} g^{(n-k)}(x)\Big|_{x=x_0}$$ Leibniz´sche Produktregel

• Zusammengesetzte Funktionen, "Kettenregel"

Sind f und g zwei Funktionen der reellen Veränderlichen x, dann heißt die Funktion F mit der Funktionalgleichung $y = F(x) = g[f(x)]$ und dem Definitionsbereich $D(F) = \{x \in D(f)\,|\,f(x) \in D(g)\}$ die aus f und g zusammengesetzte Funktion und wird mit $F = g \circ f$ bezeichnet.

Die Funktionen f(t) und g(x) seien an den Stellen x_0 und t_0 differenzierbar und es gelte $x_0 = f(t_0)$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $F(t) = g[f(t)]$ in $t = t_0$ differenzierbar und ihre Ableitung an der Stelle t_0 lautet

$$\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d}{dt} g[f(t)]\right|_{t=t_0} = g'[f(t)]\cdot f'(t)\Big|_{t=t_0}. \qquad \text{"Kettenregel"}$$

■ $$\frac{d\cos^4 x}{dx} = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x)$$

■ $F(t) = a^t$, $a > 0$, reell.

Wegen $a^t = e^{t\ln a}$ folgt $F'(t) = \frac{d a^t}{dt} = \ln a\; e^{t\ln a} = \ln a\; e^t$.

• Ableitung der inversen Funktion

Sei $y = f(x)$ mit $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ invertierbar, dann berechnet sich die Ableitung der inversen Funktion $y = f^{-1}(x) = g(x)$ gemäß $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(x)}$.

■ Die Funktion $y = f(x) = \cos x$ mit der Ableitung $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ ist im Intervall $0 \le x \le \pi$ invertierbar. Die Umkehrfunktion (mit y als unabhängiger Variabler) ist $x = \arccos y$ mit der Ableitung $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Verwenden wir, wie üblich x als unabhängige Variable, $y = f(x) = \arccos x$, dann haben wir

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

• Ableitungen höherer Ordnung

Zweite Ableitung: $y'' = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d^2f}{dx^2} \equiv f''(x) \equiv f^{(2)}(x)$,

dritte Ableitung …, n-te Ableitung: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$.

1.4 Approximation von Funktionen durch Potenzreihen

In der Physik werden Funktionen f(x) häufig durch Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ approximiert.

Ist f(x) beispielsweise die unbekannte Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE), dann kann man zur Lösung einen Potenzreihenansatz versuchen. Lassen sich die konstanten Koeffizienten a_n bestimmen und die Reihe konvergiert in einem x-Intervall, so stellt sie dort die gesuchte Funktion f(x) dar.

■ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergiert für $|x| < 1$ (geometrische Reihe)

Offensichtlich enthalten Reihen gerader (ungerader) Funktionen nur gerade (ungerade) Potenzen.

• **Taylor-Reihe** → Approximation einer Funktion durch Polynome

Sei f(x) eine im Intervall $(a-\alpha, a+\alpha)$, $\alpha > 0$ beliebig oft differenzierbare Funktion und gilt

für alle $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$ $\lim_{n\to 0} R_n(x) := \lim_{n\to 0} \frac{f^{(n+1)}(x+\delta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$, $\delta \in (0,1)$, dann

kann f(x) in der Umgebung von x = a durch die Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\Big|_{x=a} (x-a)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

approximiert werden. Dabei bedeutet $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$ ("n-Fakultät", $0! := 1$).

■ Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist beliebig oft differenzierbar, wobei für alle

Ordnungen n gilt $f^{(n)} = f$. Außerdem ist $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\delta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$ für alle reellen x und damit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(→ Konvergenzradius der Reihe ∞).

Daraus ergeben sich, je nach geforderter Genauigkeit, nützliche Approximationen,

$$e^{x} = 1 + x + O(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \text{usw.},$$

die insbesondere für $x \ll 1$ schnell konvergieren.

Für die Euler´sche Zahl folgt die Darstellung $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Weitere Beispiele für Taylor-Entwicklungen:

■ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

■ aus $\frac{d}{dx}\left[-\ln(1-x)\right] = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$ folgt

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \quad \text{bzw.} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...$$

■ damit $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right)$ usw.

• Die Entwicklung einer Funktion in eine Taylor-Reihe ist oft nützlich bei der Bestimmung von Grenzwerten oder bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Funktion.

■ $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + ... - 1\right) = x$

■ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x^3/3! \pm ...}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} \pm ...\right) = 1$

■ $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ für $x \to \infty$

Durch Entwicklung nach Potenzen von $1/x^2$ für $x \gg 1$ findet man "genauer"

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \pm ...\right) = \frac{1}{x^2} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4\right)$$

Beachte: Nicht jede Funktion kann überall in eine Taylor-Reihe entwickelt werden.

■ Beispielsweise ist $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle x = 0 nicht durch eine Taylor-Reihe approximierbar, da Funktionswert und Ableitungen beliebiger Ordnung hier divergieren (wesentliche Singularität).

Fazit: Potenzreihen sind in der Physik nützlich um Funktionen zu approximieren. Wir werden später sehen, dass sie hilfreich bei der Lösung von Differential- oder Integralgleichungen und bei der Störungsrechnung sind.

■ **Beispiel: Relativistische Energie eines Teilchens** (A. Einstein, 1905)

$$E(v) = m(v)c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Gesucht wird die Reihenentwicklung nach Potenzen von $v^2/c^2 \ll 1$ (nichtrelativistischer Grenzfall)

$$f(v) = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad f(0) = 1$$

$$f'(v) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \frac{v}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}, \text{ also } f'(0) = 0$$

$$f''(v) = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} + \frac{v}{c^2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} + 3\frac{v^2}{c^4}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2}, \text{ also } f''(0) = \frac{1}{c^2}$$

usw. Wir finden

$$E = mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right) = \underbrace{mc^2}_{\substack{\text{Ruheenergie}\\ \text{Masse}\leftrightarrow\text{Energie}}} + \underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{\text{nichtrelat. kin. Energie}} + \underbrace{\frac{3}{8}mv^2\frac{v^2}{c^2}}_{\text{1. relat. Korrektur}} + \ldots \qquad (□)$$

■ Eleganterer Lösungsweg: Betrachte

$f(x)=(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots$, konvergiert für $|x|<1$.

Für natürliche Zahlen n = 1, 2, … ist das die Binomische Reihe. Die Taylor-Entwicklung

$$f(x)=(1+x)^n\ ,\ f(0)=1$$
$$f'(x)=n(1+x)^{n-1}\ ,\ f'(0)=n$$
$$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\ ,\ f''(0)=n(n-1)$$

zeigt die allgemeinere Gültigkeit. Im vorliegenden Fall ist $x=-\frac{v^2}{c^2},\ |x|<<1,\ n=-\frac{1}{2}$, also

$$\left[1+\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{-1/2}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2+\ldots=1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots$$

wie oben (□).