# 6. Felder

Unterscheide *skalare* und *vektorielle* Felder:

Skalares Feld: Jedem Ortsvektor $\underline{r}$ im $R^3$ wird eine skalare Größe $\phi(\underline{r})$ zugeordnet, also $\underline{r} \mapsto \phi(\underline{r})$.

Beispiele: Druck- oder Temperaturverteilung $p(\underline{r})$ bzw. $T(\underline{r})$; Dichten von Masse, Ladung, Energie und anderen skalaren Größen als Funktionen des Ortsvektors $\underline{r}$ und eventuell der Zeit (stationäre bzw. zeitlich veränderliche Felder, z.B. stationäre und instationäre Temperaturverteilung, $T(\underline{r})$ bzw. $T(\underline{r},t)$).

Vektorfeld: Zuordnung: $\underline{r} \mapsto \underline{A}(\underline{r})$, also jedem Ortsvektor $\underline{r}$ im $R^3$ eine vektorielle Größe $\underline{A}(\underline{r})$.

Beispiele: Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit $\underline{u}(\underline{r},t)$, elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{r},t)$ und magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{r},t)$ des elektromagnetischen Feldes sowie natürlich alle Kraftfelder.

■ Das von einer Masse M erzeugte Gravitationsfeld übt auf die Masse m die Kraft

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

aus. Die Gravitationskraft ist anziehend, ihr Betrag nimmt quadratisch zum Abstand zwischen M und m ab. Die Gravitationskraft ist zum Gravitationszentrum gerichtet; das Gravitationsfeld ist also ein Zentralfeld.

■ Das Coulomb-Feld beschreibt die anziehende oder abstoßende Kraft zwischen zwei ruhenden Punktladungen q und Q. Der Betrag der Coulomb-Kraft fällt ebenfalls proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen den Ladungen und ist entlang der Verbindungslinie beider Punktladungen gerichtet

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}.$$

■ Kräfte auf einen Körper können auch von seiner Geschwindigkeit $v = \dot{r}$ abhängen. Ein Beispiel dafür ist die Stokes´sche Kraft. Das ist die Reibungskraft auf eine laminar umströmte Kugel mit Radius R in einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität $\eta$

$$\underline{F}(\dot{\underline{r}}) = -6\pi\eta R\,\dot{\underline{r}}\,.$$

In turbulenten Strömungen wächst F nichtlinear mit $v = \dot{r}$, vgl. Karman´sche Wirbelstraße).

■ Auf eine bewegte Punktladung q wirkt im elektromagnetischen Feld die Lorentz-Kraft

$$\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = q\left[\,\underline{E}(\underline{r},t) + \dot{\underline{r}}\times\underline{B}(\underline{r},t)\,\right].$$

Dabei ist $v = \dot{r}$ die Geschwindigkeit der Punktladung; $\underline{E}(\underline{r},t)$ bezeichnet die elektrische Feldstärke und $\underline{B}(\underline{r},t)$ die magnetische Induktion des Feldes.

## 6.1 Richtungsableitung, Gradient eines skalaren Feldes

Die Änderung eines skalaren Feldes $\phi(\underline{r}) = \phi(x,y,z)$ in Richtung $d\underline{r} = (dx,dy,dz)^T$ setzt sich additiv aus den Änderungen parallel zu den drei Koordinatenachsen zusammen

$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\,.$$

Die Größen $\frac{\partial\phi}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{y,z=\text{const}}$, $\frac{\partial\phi}{\partial y} \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{x,z=\text{const}}$ und $\frac{\partial\phi}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{x,y=\text{const}}$ sind die partiellen Ableitungen der Funktion $\phi(x,y,z)$ nach x, y bzw. z.

**Def.:** Das <u>Vektor</u>feld mit den Komponenten $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^T =: \text{grad}\,\phi(\underline{r}) =: \underline{\nabla}\,\phi(\underline{r})$

heißt **Gradientenfeld** des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$. Wenn wir den Vektor-Differentialoperator

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z\frac{\partial}{\partial z} = \underline{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

→ **Nabla-Operator**

einführen, lässt sich das Gradientenfeld von $\phi(\underline{r})$ verkürzt in der Form

$$\mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) = \underline{\nabla}\,\phi(\underline{r})$$

schreiben: Formal entsteht es durch Anwendung des Nabla-Operators auf die Funktion $\phi(x,y,z)$.

Beachte:

1) Streng genommen ist zu beweisen, dass $\underline{\nabla}$ ein Vektor ist. Interessenten finden den Beweis z.B. in §3.6. und § 1.4. des Buches von S. Großmann "Mathematischer Einführungskurs für die Physik". Dort wird gezeigt: Das Tripel $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$ transformiert sich bei Drehung des Koordinatensystems wie die Komponenten eines Vektors. Deshalb kann der Nabla-Operator $\underline{\nabla}$ als Vektor aufgefasst werden.

2) Aus Sicht der Vektoralgebra handelt es sich bei $\underline{\nabla}\,\phi(\underline{r})$ um die Multiplikation des Vektors $\underline{\nabla}$ mit dem Skalar $\phi(\underline{r})$. Während in einem Produkt aus einem Vektor $\underline{a}$ und einem Skalar $\phi$ die Reihenfolge der Faktoren vertauscht werden kann, $\underline{a}\,\phi = \phi\,\underline{a}$, ist das für das Produkt aus $\underline{\nabla}$ und $\phi$ nicht möglich, wenn $\phi$ von x, y, und/oder z abhängt. $\underline{\nabla}$ ist gleichzeitig Vektor und Differentialoperator.

Offensichtlich gilt

$$d\phi(\underline{r}) = d\phi(x,y,z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}\,.$$

<u>Fazit:</u> Die Änderung des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$ in Richtung $d\underline{r}$ ist gleich der Projektion des Gradienten von $\phi$ im Punkt $\underline{r}$ auf $d\underline{r}$ → **Richtungsableitung**.

• Geometrische Veranschaulichung am Beispiel des Gradientenfeldes eines ebenen skalaren Feldes $\phi(x,y)$

<u>Entlang einer Aquipotenziallinie $\phi$ = const</u> ändert sich $\phi$ nicht, d.h., in diesem Fall ist $d\phi = 0$ und der Vektor $d\underline{r}$ ist tangential zur Tangente an die Äquipotenziallinie gerichtet. Aus

$d\phi = \operatorname{grad}\phi \cdot d\underline{r} = 0$ erkennen wir, dass grad $\phi$ senkrecht auf den Äquipotenziallinien $\phi = \text{const}$ steht, also in Richtung des steilsten Anstiegs im "$\phi$ - Gebirge" zeigt. Folglich ist der Betrag des Gradienten von $\phi$, $|\operatorname{grad}\phi|$, ein Maß für die Änderung von $\phi$ senkrecht zu $\phi = \text{const}$.

Die Änderung $d\phi(\underline{r})$ von $\phi$ in einer <u>beliebigen</u> <u>durch</u> $d\underline{r}$ <u>festgelegten</u> <u>Richtung</u> ist die Projektion von $\operatorname{grad}\phi$ auf $d\underline{r}$, folglich das Skalarprodukt aus den beiden Vektoren $\operatorname{grad}\phi$ und $d\underline{r}$, oder wie oben beschrieben $d\phi(\underline{r}) = \operatorname{grad}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$.

Hängt $\phi$ implizit nur von einer unabhängigen Variablen (z.B. der Zeit t) ab, dann ändern sich mit t gleichzeitig x, y und z. In diesem häufig anzutreffenden Fall gilt für die vollständige (totale) Ableitung von $\phi$ nach der Zeit

$$\frac{d\phi(\underline{r},t)}{dt} = \frac{d\phi(x(t),y(t),z(t),t)}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = (\underline{\nabla}\phi)\cdot\dot{\underline{r}} + \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

(Kettenregel bei Funktionen mehrerer Veränderlicher).

Sind das skalare Feldes $\phi$ und seiner partiellen Ableitungen nach allen Variablen stetig, dann spielt bei partiellen Ableitungen zweiter Ordnung die Reihenfolge der Bildung der Ableitung keine Rolle. Es gilt

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\,\partial x_i},\ \ i,j = 1,2,3,\ \ x_1 = x,\ \ x_2 = y,\ \ x_3 = z.$$

## 6.2 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Wenden wir den Nabla-Operator auf Vektorfelder $\underline{A}(\underline{r})$ an, können wir <u>rein formal</u> ein Skalarprodukt oder ein Vektorprodukt aus den Vektoren $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$ bilden.

<u>Skalarprodukt</u> aus den Vektoren $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$

**Def.:** Das skalare Feld $\underline{\nabla}\cdot\underline{A}(\underline{r}) =: \operatorname{div}\underline{A}(\underline{r}) =: \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Ay}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

heißt **Divergenz des** (stetig differenzierbaren) Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$ im Punkt $\underline{r}$. Dieses Feld wird **Quellenfeld** des Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$ genannt.

• Anschauliche Interpretation der Divergenz als lokale Quellstärke eines Strömungsfeldes. Die über die Oberfläche eines abgeschlossenen Volumens ausfließende (einfließende) Flüssigkeitsmenge ist gleich der Abnahme (Zunahme) der Masse in V (Massenerhaltung). Wählt man ein infinitesimal kleines $\delta V$ um einen Punkt mit dem Ortsvektor $\underline{r}$, dann lässt sich die Massebilanz lokal durch eine Beziehung zwischen Massendichte $\rho(\underline{r}, t)$ und Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \cdot \underline{v}(\underline{r}, t)$ ausdrücken (ohne Beweis): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$ (Kontinuitätsgleichung). Die über die Oberfläche von $\delta V$ um $\underline{r}$ ausfließende (einfließende) Flüssigkeitsmenge ist gleich der Abnahme (Zunahme) der Dichte in $\delta V$. Damit ist die Divergenz $\operatorname{div} \underline{j}$ ein *Maß für die lokale Quellstärke* des Feldes im Punkt $\underline{r}$.

Vektorprodukt aus den Vektoren $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$:

**Def.:** Das Vektorfeld

$$\underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r}) =: \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) =: \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \underline{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \underline{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \underline{e}_z$$

heißt **Rotation** des (stetig differenzierbaren) Vektorfelds $\underline{A}(\underline{r}) = A_x(\underline{r}) \underline{e}_x + A_y(\underline{r}) \underline{e}_y + A_z(\underline{r}) \underline{e}_z$ im Punkt $\underline{r}$. Dieses Feld wird **Wirbelfeld** von $\underline{A}(\underline{r})$ genannt.

Als Komponenten des Vektorprodukts der Vektoren $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$ lassen sich die kartesischen Komponenten des Wirbelfeldes von $\underline{A}(\underline{r})$ wie folgt darstellen

$$(\operatorname{rot} \underline{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}.$$

Also ist

$$\operatorname{rot} \underline{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \underline{e}_i \quad \text{(Summenkonvention!).}$$

• Anschauliche Interpretation der Rotation als lokale Wirbelstärke eines Strömungsfeldes
Wir betrachten als Beispiel das Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$ eines homogenen ($\underline{\omega}$ = const) Wirbels in einer Flüssigkeitsströmung. Dann gilt

$$\operatorname{rot}\underline{u}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = \underline{\omega}(\underline{\nabla}\cdot\underline{r}) - (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{r} = \underline{\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right) - \begin{pmatrix}(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,x\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,y\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,z\end{pmatrix} =$$

$$= 3\underline{\omega} - \begin{pmatrix}(\omega_x\frac{\partial}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial}{\partial z})\,x\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,y\\(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,z\end{pmatrix} = 3\underline{\omega}-\underline{\omega} = 2\underline{\omega}\,.$$

$\operatorname{rot}\underline{u}(\underline{r})$ zeigt in Richtung der Wirbelachse, der Betrag $|\operatorname{rot}\underline{u}(\underline{r})|$ ist gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit bzw. "Stärke" des Wirbels.

Beispiele:

■ Wenn $\underline{A}$ = grad $\phi$, dann ist rot $\underline{A}$ = rot grad $\phi = 0 \rightarrow$ **Gradientenfelder sind wirbelfrei**.

$$\text{Beweis: } (\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0\,,$$

analog für die y- und die z-Komponente $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi)_y = 0$, $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi)_z = 0$.

Alternativer "Beweis": $\operatorname{grad}\phi = \underline{\nabla}\phi$ hat die "Richtung von $\underline{\nabla}$", daher ist das Vektorprodukt

$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\,\phi = 0$ .

■ Wenn $\underline{B}$ = rot $\underline{A}$, dann ist div $\underline{B}$ = div rot $\underline{A} = 0 \rightarrow$ **Wirbelfelder sind quellenfrei**.

Beweis komponentenweise, z.B. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{A} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\,\partial x_j} = 0$.

Alternativ: "Spatprodukt" $\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{A} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = 0$.

■ $$\operatorname{div}(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\times\underline{B}) \underset{\text{zyklisch}}{=} (\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}}\times\overset{\downarrow}{\underline{A}})\cdot\underline{B} + (\overset{\downarrow}{\underline{B}}\times\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}})\cdot\underline{A} = \underline{B}\cdot\operatorname{rot}\underline{A} \underset{!}{-} \underline{A}\cdot\operatorname{rot}\underline{B}\,.$$

Bei der Anwendung des Operators $\underline{\nabla}$ auf Funktionen sind immer sowohl die Regeln der Vektoralgebra als auch die der Differentialrechnung zu beachten. Die sich hier bei zyklischer Vertauschung im Spatprodukt (Vektoralgebra) ergebende Reihenfolge $\overset{\downarrow}{\underline{B}}\times\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}}$ muss in $-\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}}\times\overset{\downarrow}{\underline{B}}$ "korrigiert" werden, damit die Produktregel der Differenzialrechnung nicht verletzt wird. Beweis komponentenweise.

• Quellstärke und Wirbelstärke sind definierende Eigenschaften eines Vektorfeldes. Dies unterstreicht der Helmholtz´sche Hauptsatz der Vektoranalysis (1859). Er besagt:

Satz: Ein über einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit (stückweise) glatter Randfläche definiertes Vektorfeld $\underline{A}(r)$, das asymptotisch gegen Null abfällt, $\underline{A}(r \to \infty) = 0$, lässt sich stets additiv in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil zerlegen:

$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_1(\underline{r}) + \underline{A}_2(\underline{r})$ mit $\text{rot}\,\underline{A}_1(\underline{r}) = 0$ und $\text{div}\,\underline{A}_2(\underline{r}) = 0$.

Aus seiner Quell- und seiner Wirbelstärke lässt sich ein Vektorfeld selbst rekonstruieren:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \left[ \rho(\underline{r}')\,\text{grad}'\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \underline{\omega}(\underline{r}')\times\text{grad}'\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right], \text{ mit } \rho = \text{div}\,\underline{A},\ \underline{\omega} = \text{rot}\,\underline{A}$$

(vgl. z.B. S. Großmann, § 9.5.).

■ Beispiel: Die Maxwell´schen Gleichungen treffen Aussagen über die Quellen und Wirbel des elektromagnetischen Feldes ($\rho(\underline{r},t)$ - Ladungsdichte, $\underline{j}(\underline{r},t)$ - Stromdichte)

$$\text{div}\underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t) \quad (1), \qquad \text{rot}\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial \underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} \quad (2),$$

$$\text{div}\underline{B}(\underline{r},t) = 0 \quad (3), \qquad \text{rot}\underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial D(\underline{r},t)}{\partial t} \quad (4).$$

Dieses System von Differentialgleichungen beschreibt die elektromagnetischen Erscheinungen im Vakuum (wenn $\rho(\underline{r},t) = 0$, $\underline{j}(\underline{r},t) = 0$) und in ruhenden Stoffen (dann gemeinsam mit den sogenannten Materialgleichungen; im einfachsten Fall isotroper Medien $\underline{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\underline{E}$, $\underline{B} = \mu_r\mu_0\underline{H}$; bei stromleitenden Medien $\underline{j} = \sigma\underline{E}$, usw.).

Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des elektrischen Verschiebungsfeldes $\underline{D}(\underline{r},t)$ (1), die zeitlichen Änderungen der magnetischen Induktion $\underline{B}(\underline{r},t)$ erzeugen die Wirbel der elektrischen Feldstärke $\underline{E}(\underline{r},t)$ (2, Induktionsgesetz), das magnetische Feld ist quellenfrei (3) sowie Leitungs- und Verschiebungsströme bestimmen die Wirbel des magnetischen Feldstärke $\underline{H}(\underline{r},t)$ (4).