8. Integrale

8.1 Integral über Funktionen einer unabhängigen reellen Veränderlichen

- Stammfunktion: Ist eine Funktion F(x) in [a,b] differenzierbar und gilt $\frac{dF}{dx} = f(x)$, so heißt

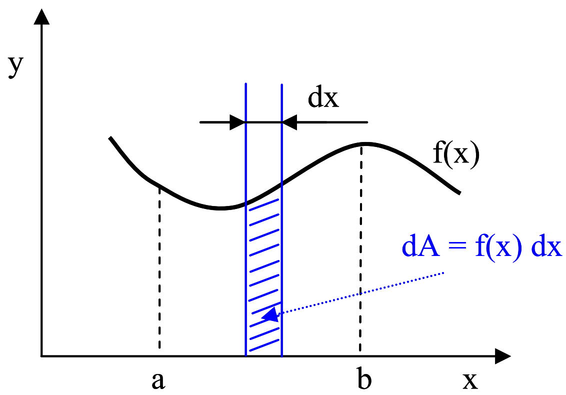
F Stammfunktion von f und es gilt $\int dx\, f(x) = F(x) + \text{const}$ (unbestimmte Integrale)

- "Hauptsatz der Integralrechnung": $\underline{\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)}$. (bestimmte Integrale)

- Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche A unter der Kurve f(x)

$A = \int_a^b dx\, f(x) \rightarrow$ Fläche A wird begrenzt durch die x-Achse, die Geraden x = a, x = b und das Bild der Funktion f(x).

A ist der Grenzwert $dx \rightarrow 0$ der Summe $\sum f(x)dx$ aus unendlich vielen infinitesimal schmalen Streifen mit der Fläche $dA = f(x) \cdot dx$.



Notation: x → Integrationsvariable, f(x) → Integrand, a und b → Integrationsgrenzen, $\int$ → stilisiertes Summenzeichen.

Verändern wir die obere Grenze b, so ändert sich die Fläche A. Wir können das Integral $A(b) = \int_a^b dx\, f(x)$ als Funktion von b auffassen wobei $\frac{dA}{db} = \frac{d}{db}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right) = f(b)$ gilt.

Analog ist bei veränderlicher unterer Grenze $\frac{d}{da}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right) = -f(a)$.

Werden die obere (untere) Grenze beliebig groß (klein) können wir Grenzwerte der Form

$$\int_a^\infty dx\, f(x) := \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$

betrachten; wir sprechen in diesen Fällen von *uneigentlichen* Integralen.

■ Beispiel: Existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty dx\, \left[\ln(1+e^x) - x\right]$?

Ja, denn für $x \to \infty$ verhält sich der Integrand asymptotisch wie e^{-x}, weil

$$\ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln e^x = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x}) \approx e^{-x}.$$

● **Einige gängige Integrationsmethoden**

A Variablensubstitution $\int_a^b dx\ f(x) \overset{x=x(t)}{=} \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{dx(t)}{dt}\, f\big(x(t)\big)$.

Der Übergang von der alten zur neuen Integrationsvariablen Variablen geschieht durch eine eineindeutige Zuordnung $x = x(t)$. Für die neuen Integrationsgrenzen wird die inverse Funktion $t = t(x)$ benötigt. U.U. ist es zweckmäßig, das Integrationsintervall in Segmente zu zerlegen, in denen x(t) monoton ist.

"Rein technisch" erweitern wir bei der Variablensubstitution mit dt: $dx = dt \cdot \frac{dx}{dt}$ - Differentialquotienten erster Ordnung dürfen wie Brüche behandelt werden.

■ Beispiel: $\int dx \tan x$

Substitution: $z = \cos x$, $dz = -\sin x\, dx$, $dx = -\frac{1}{\sin x} dz$

$$\int dx \tan x = \int dx \frac{\sin x}{\cos x} = -\int dz \frac{1}{\sin x}\frac{\sin x}{\cos x} = -\int dz \frac{1}{z} = -\ln|z| = -\ln|\cos x|$$

■ Beispiel Kreisfläche: $A = 4\int_0^R dx\,\sqrt{R^2 - x^2}$

Substitution: $x = R\sin\varphi$, also $dx = R\cos\varphi\; d\varphi$, $x = 0 \to \varphi = 0$, $x = R \to \sin\varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Es folgt

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\;\; R\cos\varphi\,\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\varphi} \;\; = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\;\;\cos\varphi\,\sqrt{1-\sin^2\varphi} \;\; = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\;\;\cos^2\varphi = \pi R^2$$

denn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\cos^2\varphi = \frac{\pi}{4}$, siehe **(B)**.

(B) partielle Integration

Diese Methode <u>kann</u> die Berechnung des Integrals vereinfachen, wenn der Integrand ein Produkt aus zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist und von einem Faktor die Stammfunktion bekannt ist, z.B. $f_2(x) = \frac{dF_2(x)}{dx}$. Dann gilt $f_1 \cdot f_2 = f_1\frac{dF_2}{dx} = \frac{d}{dx}(f_1 \cdot F_2) - \frac{df_1}{dx}F_2$ also

$$\int dx\, f_1 \cdot f_2 = \int dx\left[\frac{d}{dx}(f_1 \cdot F_2) - \frac{df_1}{dx}F_2\right] = f_1 \cdot F_2 - \int dx\,\frac{df_1}{dx}F_2 \quad .$$

Oder: Für u(x) und v(x) ist $u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(u \cdot v) - \frac{du}{dx}v$, deshalb

$$\int dx\;\, u\frac{dv}{dx} = \int dx\,\frac{d}{dx}(u\cdot v) - \int dx\;\frac{du}{dx}v \quad \text{oder kurz} \quad \underline{\int u\,dv = u\cdot v - \int dv\,du}$$

■ Beispiel: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\;\;\cos^2\varphi = \frac{\pi}{4}$, siehe Kreisfläche oben.

$$\int d\varphi\,\cos^2\varphi =$$

$$= \int \cancel{d\varphi}\,\frac{d(\sin\varphi)}{\cancel{d\varphi}}\,\cos\varphi = \sin\varphi\,\cos\varphi - \int d\varphi\;\;\sin\varphi(-\sin\varphi) = \sin\varphi\,\cos\varphi + \int d\varphi\;(1-\cos^2\varphi)$$

Also ist

$$2\int d\varphi \cos^2\varphi = \sin\varphi\cos\varphi + \varphi$$

und damit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2\varphi = \left.\frac{\sin\varphi\cos\varphi + \varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Daraus folgt sofort auch $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^2\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(1-\cos^2\varphi) = \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2\varphi}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.$

■ Beispiel: $\int dx \ln x = x\ln x - x$,

denn

$$\int dx \ln x = \int dx\, 1\cdot \ln x = x\ln x - \int dx\, x\cdot\frac{d}{dx}\ln x = x\ln x - \int dx\, x\frac{1}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$$

C Differenzieren nach einem Parameter

■ Beispiel: $\int_0^\infty dx\, x\, e^{-x} = 1$

Um dieses Integral zu berechnen, führen wir hilfsweise den Parameter a ein und betrachten die Abhängigkeit $I(a) = \int_0^\infty dx\, x\, e^{-ax}$, deren Funktionswert bei a = 1 gerade das gesuchte Integral ist. Bei der Berechnung von I(a) differenzieren wir nach dem Parameter a

$$I(a) = \int_0^\infty dx\, x\, e^{-ax} = -\frac{d}{da}\left(\int_0^\infty dx\; e^{-ax}\right) = -\frac{d}{da}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_{x=0}^{x\to\infty}\right) = +\frac{d}{da}\left(0-\frac{1}{a}\right) = -\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\right) = -\left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}$$

.

Also ist $I(a=1) = 1$. Partielle Integration führt auf dasselbe Ergebnis

$$\int_0^\infty dx\, x\, e^{-x} = \int_0^\infty x\; d(-e^{-x}) = \underbrace{-x\,e^{-x}\Big|_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty dx\,(-e^{-x}) = \int_0^\infty dx\; e^{-x} = -\,e^{-x}\Big|_0^\infty = -(0-1) = 1\,.$$

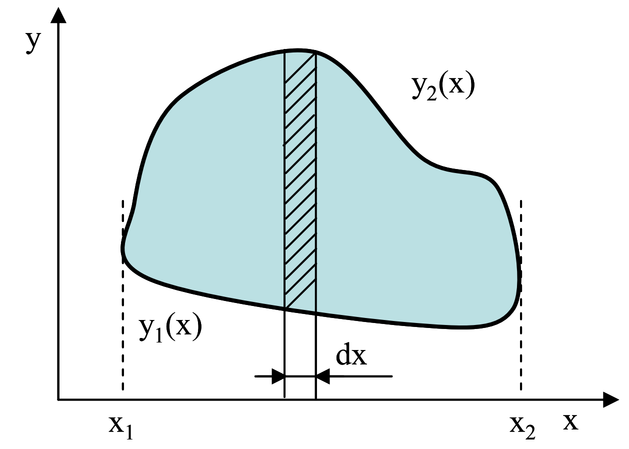
Beachte: Für bestimmte Integrale in symmetrischen Grenzen gilt

$$\int_{-a}^{a} dx\, f(x) = \begin{cases} 2\int_0^a dx\, f(x), & \text{wenn } f(x) = f(-x) \text{ gerade} \\ 0, & \text{wenn } f(x) = -f(-x) \text{ ungerade} \end{cases}$$

8.2 Mehrfachintegrale

Zu berechnen sei ein Integral der Form

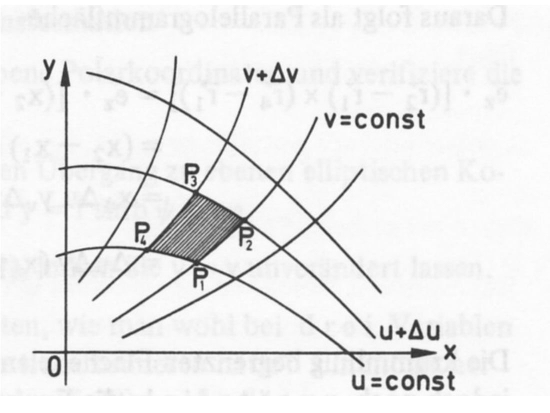
$$\int_F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Flächen} \\ \text{element}}}{d^2r} \;\; \phi(x,y) \; = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, \phi(x,y)}_{\text{Streifen } (x,\, x+dx)} .$$



Die Fläche sei zusammenhängend, $y_2(x)$ und $y_1(x)$ also eindeutig; wenn nicht, Fläche geeignet in Teilflächen zerlegen.

- Transformation von Flächenelemente d^2r beim Übergang zu krummlinigen Koordinaten

Die schraffierte Fläche ist für kleine $(\Delta u, \Delta v)$ näherungsweise ein Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$, dessen Flächeninhalt gleich dem Betrag des Vektorprodukts aus $\underline{r}_2 - \underline{r}_1$ und $\underline{r}_4 - \underline{r}_1$ ist.



$$A = \underline{e}_z \cdot \left[(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \times (\underline{r}_4 - \underline{r}_1) \right] = \underline{e}_z \cdot \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_1) \stackrel{\bullet}{=}$$

Wegen

$$x_2 = x(u+\Delta u, v) \cong x_1 + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \ , \quad y_2 = y(u+\Delta u, v) \cong y_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$$

$$x_4 = x(u, v+\Delta v) \cong x_1 + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \ , \quad y_4 = y(u, v+\Delta v) \cong y_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

folgt

$$A \stackrel{\bullet}{=} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v = \Delta u \Delta v \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right) = \Delta u \Delta v \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} .$$

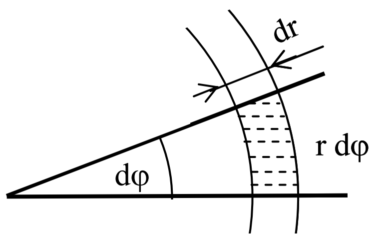
Fazit: $\underline{dx\,dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv}$ bzw. $\underline{\int dx\,dy\ f(x,y) = \int \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv\ f\big(x(u,v), y(u,v)\big)}$

Die krummlinig begrenzten Flächenelemente sind wie erwartet proportional zu $du\,dv$, der Proportionalitätsfaktor ist die Funktionaldeterminante genau an dem Punkt, an dem sich das Flächenelement befindet. Das ist die Verallgemeinerung der Regel $dx = \frac{dx}{du}du$ für die Substitution $x = x(u)$ im eindimensionalen Fall.

Die Formel für die Transformation eines Volumenelements lautet

$$\underline{d^3r = dx\,dy\,dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,du\,dv\,dw} .$$

■ Beispiel: Ebene Polarkoordinaten:



Geometrisch ergibt sich für das Flächenelement sofort $dr \cdot r d\varphi$. Die Vorschrift

$dx\,dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\,dr\,d\varphi$ führt zum gleichen Ergebnis, denn $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$, vgl. Kapitel 7.

■ Beispiel: Masse $M = \int\limits_F d^2r\ \rho(x,y)$ einer näherungsweise ebenen Galaxie, deren Dichte entsprechend $\rho(x,y) = \rho_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$ exponentiell vom Zentrum weg abnimmt.

Für die Berechnung des Integrals bieten sich ebene Polarkoordinaten an

$$M = \int\limits_F d^2r\ \rho(x,y) = \rho_0 \int\limits_F d^2r\ \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) = \left[\ \rho_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\right] =$$

$$\underset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{=} \rho_0 \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}}_{r}\ e^{-\frac{r^2}{a^2}} = 2\pi\rho_0 \int\limits_0^{\infty} dr\ r e^{-\frac{r^2}{a^2}} = 2\pi a^2 \rho_0 \int\limits_0^{\infty} dz\ z e^{-z^2} =$$

$$= 2\pi a^2 \rho_0 \int\limits_0^{\infty} dz \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\right) = 2\pi a^2 \rho_0 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-z^2}\Big|_0^{\infty} = \pi a^2 \rho_0\ .$$

Bem.: Hervorhebenswert ist in diesem Zusammenhang das Ergebnis $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$,

$$\text{denn}\quad I^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\ e^{-(x^2+y^2)} = 2\pi \int\limits_0^{\infty} dr\ r\ e^{-r^2} = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi\ .$$