Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Anna Zakharova, Jan Totz MSc, Anne-Kathleen Malchow BSc, Robert Salzwedel BSc, Manuel Katzer BSc, Christopher Wächtler BSc

6. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 08.06.2016 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 13 (6 Punkte): *Geschwindigkeitsfelder*

Betrachten Sie die ebenen Geschwindigkeitsfelder in zwei Dimensionen,

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

beschrieben sind.

(i) $u(x,y) = c, \qquad v(x,y) = 0$

(ii) $u(x,y) = cy, \qquad v(x,y) = 0$

(iii) $u(x,y) = \varepsilon \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v(x,y) = \varepsilon \frac{y}{x^2+y^2} \quad (r > 0)$

(iv) $u = M \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad v = -M \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad (r > 0)$

Hierbei sei $r = \sqrt{x^2+y^2}$ der Betrag und c, ε, M Konstanten.

(a) Plotten Sie das jeweilige Vektorfeld oder einige Stromlinien. Tipp: Verwenden Sie die Mathematica-Befehle VectorPlot und StreamPlot.

(b) Berechnen Sie die Divergenz $\underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r})$ und die Rotation $\underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r})$ des jeweiligen Vektorfeldes.

Aufgabe 14 (9 Punkte): *Nabla-Operator*
Es sei $\underline{r}$ der Ortsvektor $\underline{r} = (x,y,z)^T$ und r sein Betrag $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ sei ein konstanter Vektor, der also nicht von $\underline{r}$ abhängt.

(a) Berechnen Sie die Divergenz
$$\underline{\nabla} \cdot (r\underline{a}) \,.$$

(b) Berechnen Sie den Gradienten
$$\underline{\nabla}(\underline{a} \cdot \underline{r}).$$

(c) Berechnen Sie das Gradientenfeld
$$\underline{\nabla} r^n \,.$$

(d) Beweisen Sie mithilfe des Levi-Civita-Symbols die Relation:
$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{c}) = \underline{\nabla}(\nabla \cdot \underline{c}) - \Delta \underline{c} \,,$$
wobei die Komponenten des Vektors $\underline{c}$ hinreichend oft nach x, y und z differenzierbar ist.

(e) Berechnen Sie die Divergenz
$$\underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\underline{r}}{r}\right).$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

6. Übung SS16

Aufgabe 15 (5 Punkte): *Gravitation*
Gegeben sei die Gravitationskraft

$$\underline{F}_G(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r},$$

zwischen zwei Massen m und M, wobei eine der Massen o.B.d.A. im Ursprung sei. Dabei sei γ die Gravitationskonstante, $\underline{r}$ der Ortsvektor $\underline{r} = (x, y, z)^T$ und r sein Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass dieses Kraftfeld ein Gradientenfeld ist.

(b) Verifizieren Sie, dass die Zentralkraft $\underline{F}_G$ sich durch Gradientenbildung aus dem Gravitationspotenzial $U(r) = -\gamma \frac{M}{r}$ berechnen lässt:

$$\underline{F}_G(\underline{r}) = -m\underline{\nabla} U(r)$$

(c) Zeichnen Sie U in einem 3D Plot in kartesischen Koordinaten und für feste Werte von z mithilfe eines Plotprogrammes. Tipp: Verwenden Sie in Mathematica den Befehl Plot3D.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2016/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm16/

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert; keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist der selbstgeschriebene Code ausgedruckt mit abzugeben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik
- S. Hess: Tensors for Physics. Undergraduate Lecture Notes in Physics (Springer, 2015)