Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Anna Zakharova, Jan Totz MSc, Anne-Kathleen Malchow BSc, Robert Salzwedel BSc, Manuel Katzer BSc, Christopher Wächtler BSc

8. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 22.06.2016 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 17 (6 Punkte): *Divergenz in krummlinig-orthogonalen Koordinaten*

(i) Verifizieren Sie ausgehend von der Darstellung des Nabla-Operators (Notation wie in der Vorlesung)

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_u \frac{1}{g_u}\frac{\partial}{\partial u} + \underline{e}_v \frac{1}{g_v}\frac{\partial}{\partial v} + \underline{e}_w \frac{1}{g_w}\frac{\partial}{\partial w} \tag{1}$$

den entsprechenden Ausdruck für die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{A} = A_u\underline{e}_u + A_v\underline{e}_v + A_w\underline{e}_w$ in krummlinig-orthogonalen Koordinaten (u, v, w):

$$\operatorname{div}\underline{A} = \frac{1}{g_u g_v g_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(g_v g_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(g_u g_w A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(g_u g_v A_w)\right]. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung:

$$g_{u_k}\underline{e}_{u_i}\frac{\partial \underline{e}_{u_k}}{\partial u_i} = \frac{\partial g_{u_i}}{\partial u_k} - \delta_{ik}\frac{\partial g_{u_k}}{\partial u_i} = \begin{cases} 0, & i = k \\ \frac{\partial g_{u_i}}{\partial u_k}, & i \neq k \end{cases}$$

$(i, k = 1, 2, 3;\ u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$, keine Summenkonvention)

Diese lässt sich ausgehend von

$$\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_k \partial u_i}$$

herleiten. Wie?

(ii) Welcher allgemeine Ausdruck ergibt sich daraus für den Laplace-Operator $\Delta\phi(\underline{r})$ in krummlinig-orthogonalen Koordinaten (u, v, w) angewendet auf ein Skalarfeld $\phi(\underline{r})$?

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

8. Übung SS16

Aufgabe 18 (8 Punkte): *Laplace-Operator in Kugelkoordinaten*

(i) Beweisen Sie für den Laplace-Operator des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$ in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) den Ausdruck

$$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}.$$

(ii) Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Ausdrücke im Fall eines kugelsymmetrischen Potentialfeldes:

$$\Delta\phi(\underline{r}) = \Delta\phi(r) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right).$$

Überzeugen Sie sich davon, dass die Berechnung von $\Delta\phi(r)$ unter Verwendung kartesischen Koordinaten gemäß

$$\Delta\phi(r) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

auf dasselbe Ergebnis führt.

Aufgabe 19 (6 Punkte): *Ableitungen der Einheitsvektoren*

Berechnen Sie die Ableitungen der Einheitsvektoren

$$\frac{\partial \underline{e}_{u_i}}{\partial u_k} \quad (i,k = 1,2,3; u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w)$$

in Kugelkoordinaten.