Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Anna Zakharova, MSc. Jan Totz, Anne-Kathleen Malchow BSc, Robert Salzwedel BSc, Manuel Katzer BSc, Christopher Wächtler BSc

5. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 01.06.2016 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 11 (8 Punkte): *Drehmatrizen*

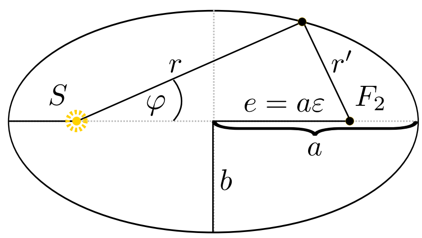
Bei der Drehung des kartesischen Koordinatensystems $\sum$ mit der Basis $\{\underline{e}_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ in das Koordinatensystem $\sum'$ transformieren sich die Komponenten x_i eines Vektors $\underline{r} = x_i \underline{e}_i$ in die Komponenten x'_i, $\underline{r} = x'_i \underline{e}'_i$, wobei die Einheitsvektoren $\{\underline{e}'_i\}$ die Basis in $\sum'$ bezeichnen. Diese Koordinatentransformation lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (*) \qquad \underline{r}(\textstyle\sum') = \underline{\underline{D}}\, \underline{r}(\textstyle\sum)$$

darstellen.

1) Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$:
   (i) Für die Elemente d_{jm} von $\underline{\underline{D}}$ gilt: $d_{jm} = \underline{e}'_j \cdot \underline{e}_m = \cos\varphi_{jm}$ (Richtungskosinus)
   (ii) Die Zeilen von $\underline{\underline{D}}$ sind orthonormiert: $d_{im} d_{jm} = \delta_{ij}$
   (iii) Drehmatrizen sind orthogonale Matrizen: $\underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{D}}^{-1}$
2) Beweisen Sie: Das Skalarprodukt aus zwei Vektoren ist invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems (nicht nur der Betrag/die Länge eines Vektors, auch der Winkel zwischen zwei Vektoren ist invariant unter Drehungen).

Aufgabe 12 (12 Punkte): *Kepler'sche Gesetze und Gravitationsgesetz*
Aus den Kepler'schen Gesetzen I und II für die Planetenbewegung (Siehe VL) soll hier das Newton'sche Gravitationsgesetz abgeleitet werden.
Nach dem I. Kepler'schen Gesetz bewegen sich die Bahnen der Planeten auf Ellipsen, mit der Sonne in einem Brennpunkt [Siehe Skizze]. Die Ellipse E, auf der sich die Planeten bewegen, kann als Menge aller Punkte mit $E := \{P, |r + r' = 2a\}$ angegeben werden.



(a) Eliminieren Sie r' aus der Ellipsenbedingung $r + r' = 2a$ und geben Sie den Abstand des Planeten zur Sonne r als Funktion der Winkels φ, des Bahnparameters $p = \frac{b^2}{a}$ und der Exzentrizität ε an.

(b) Formulieren Sie die Bahnkurve $\underline{r}(t) = (x(r, \varphi), y(r, \varphi), z(r, \varphi))^T$ mithilfe des Winkels φ und des Abstandes r aus (a). Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$ sowie den Drehimpuls $\underline{L} = m\underline{r} \times \dot{\underline{r}}$, wobei m die Planetenmasse ist.

(c) Berechnen Sie die Beschleunigung $\underline{a} = \ddot{\underline{r}}$. Benutzen Sie, dass nach dem II. Kepler'schen Gesetz $mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$ gilt. Geben Sie nun mithilfe der Newton'schen Bewegungsgleichung $\underline{F} = m\ddot{\underline{r}}$ das Gravitationsgesetz an und diskutieren Sie das Ergebnis.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2016/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm16/

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist der selbstgeschriebener Code ausgedruckt mit abzugeben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik
- S. Hess: Tensors for Physics. Undergraduate Lecture Notes in Physics (Springer, 2015)