Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Anna Zakharova, MSc. Jan Totz, Anne-Kathleen Malchow BSc, Robert Salzwedel BSc, Manuel Katzer BSc, Christopher Wächtler BSc

7. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 15.06.2016 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 14 (8 Punkte): *Divergenz und Rotation von Vektorfeldern*

(i) Ist das Feld $\underline{A}(\underline{r}) = f(r) \cdot \underline{r}$ für beliebige Funktionen $f(r)$ quellenfrei?

(ii) Bestimmen Sie die Quellen des Feldes $\mathrm{grad}\phi(\underline{r}) \times \mathrm{grad}\Psi(\underline{r})$.

(iii) Beweisen Sie, dass $\mathrm{rot}(\frac{r}{r^3}) = 0$

(iv) Für welchen Wert der Konstanten a ist das Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}) = (axy - z^3)\underline{e}_x + (a-2)x^2\underline{e}_y + (1-a)xz^2\underline{e}_z$ wirbelfrei? Kann man $\underline{A}(\underline{r})$ auch quellenfrei machen?

Aufgabe 15 (6 Punkte): *Taylor-Entwicklung für Felder*
Entwickeln Sie das skalare Feld $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{a}-\underline{r}|}$, $a = \mathrm{const}$ bezüglich des kleinen Parameters r/a ($a >> r$) in eine Taylor-Reihe bis zur Ordnung $\mathrm{O}(r/a)^2$ einschließlich (quadratische Näherung).

(i) Führen Sie die Rechnungen zunächst gemäß der Vorschrift

$$\phi(\underline{r}+\Delta\underline{r}) = \phi(\underline{r}) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \frac{1}{2!}[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\Delta x\Delta z + \ldots] + \frac{1}{3!}[\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + \ldots] + \ldots = \phi(\underline{r}) + \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\Delta x_j + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_j}\Delta x_k\Delta x_j + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi}{\partial x_l\partial x_k\partial x_j}\Delta x_l\Delta x_k\Delta x_j + \ldots = [\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\Delta x_j\partial_j)^n]\phi(\underline{r})$$

($j,k,l = 1,2,3$, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$, Summenkonvention) durch.

(ii) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis unter Verwendung der Substitution

$$\frac{1}{|\underline{a}-\underline{r}|} = \frac{1}{a\sqrt{1+x}},\ x := \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}$$

und der Reihenentwicklung der Funktion $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, indem sie alle Terme systematisch nach Ordnungen in r/a bis einschließlich $(r/a)^2$ sortieren.

Aufgabe 16 (6 Punkte): *Dipolfeld*
Der zweite Term in der Entwicklung aus Aufgabe 15 hängt mit dem Feld eines konstanten elektrischen Dipols $\phi(\underline{r}) = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$, $p = \mathrm{const}$ zusammen.

(i) Berechnen Sie das elektrische Feldstärke des Dipolfeldes $\underline{E}(\underline{r}) = -\mathrm{grad}\phi(\underline{r})$.

(ii) Mit welcher Potenz nimmt der Betrag der Feldstärke E mit der Entfernung zum Dipol ab und für welchen Winkel zwischen $\underline{r}$ und $\underline{p}$ ist E maximal? Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien von $\phi(\underline{r})$ und die Feldlinien von $\underline{E}(\underline{r})$.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2016/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm16/

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist der selbstgeschriebener Code ausgedruckt mit abzugeben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik
- S. Hess: Tensors for Physics. Undergraduate Lecture Notes in Physics (Springer, 2015)