Prof. Dr. Andreas Knorr
Mathias Hayn, Marc Hennes, Helge Neitsch, Jan F. Totz, Kilian Kuhla, Anke Zimmermann

6. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Fr. 31. 5. 2013 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an.

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators*

Im Zusammenhang mit der Diagonalisierung des harmonischen Oszillators wurden in der Vorlesung die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\ell} - i\frac{\ell}{\hbar}\hat{p}\right), \tag{1}$$

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\ell} + i\frac{\ell}{\hbar}\hat{p}\right) \tag{2}$$

eingeführt. Hier ist $\ell = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$ die Oszillatorlänge.

(a) Benutzen Sie die kanonische Kommutatorrelation, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, für Ort und Impuls um die kanonische Kommutatorrelation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{3}$$

für $\hat{a}$ herzuleiten.

Seien nun die Eigenfunktionen

$$\varphi_0(x) = \pi^{-1/4}\ell^{-1/2}\exp[-\tfrac{1}{2}(x/\ell)^2] \text{ und} \tag{4}$$

$$\varphi_n(x) = N\hat{a}^{\dagger n}\varphi_0(x), \text{ mit } n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

des harmonischen Oszillators gegeben. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass aus der kanonischen Kommutatorrelation (3) die Eigenschaften $\hat{a}\,\varphi_n(x) = \sqrt{n}\,\varphi_{n-1}(x)$ und $\hat{a}^\dagger\,\varphi_n(x) = \sqrt{n+1}\,\varphi_{n+1}(x)$ folgen.

(b) Bestimmen Sie die Konstante N aus Gleichung (5).

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\varphi_n(x)$ orthonormal sind.

(d) Benutzen Sie die Definitionen aus Gl. (1) und (5) um explizit die Wellenfunktionen $\varphi_n(x)$ für $n \in 1, 2, 3$ zu bestimmen. Zeichnen Sie die Betragsquadrate dieser Funktionen und von $\varphi_0(x)$ im Bereich von $x = -3\ell$ bis $x = 3\ell$.

Aufgabe 11 (20 Punkte): *Zum Bahndrehimpuls*

Der Operator des Bahndrehimpuls ergibt sich durch Quantisierung des klassischen Drehimpulses,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \to \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}. \tag{6}$$

(a) Benutzen Sie die Kommutatorrelationen für den Drehimpulsoperator aus Aufgabe 6 (f) um den Kommutator von $\hat{L}_z$ mit $\hat{\mathbf{L}}^2$ zu berechnen.

(b) Verwenden Sie nun explizit die Ortsdarstellung für $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$ und zeigen Sie, dass die Komponenten des Operators des Bahndrehimpulses in Kugelkoordinaten durch

$$\hat{L}_x = -i\hbar\Big(-\sin\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,\partial_\varphi\Big), \tag{7}$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\Big(\cos\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\partial_\varphi\Big) \text{ und} \tag{8}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\,\partial_\varphi \tag{9}$$

gegeben sind. Stellen Sie dazu zunächst die Ableitungen in kartesischen Koordinaten durch die Ableitungen in Kugelkoordianten dar.

Hinweis: Die Koordinatentransformation ist durch die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(r,\vartheta,\varphi)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi/r & \cos\vartheta\sin\varphi/r & -\sin\vartheta/r \\ -\sin\varphi/(r\sin\vartheta) & \cos\varphi/(r\sin\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

bestimmt.

(c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (b) um $\hat{L}_x^2, \hat{L}_y^2, \hat{L}_z^2$ und das Quadrat des Bahndrehimpulses

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta\big(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\big) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\partial_\varphi^2\right] \tag{11}$$

zu bestimmen.

Betrachten Sie nun die beiden normierten Wellenfunktionen

$$\psi_1(\mathbf{r}) = f_1(r)\sqrt{\frac{15}{16\pi}}(x^2 + r\gamma z - y^2) \text{ und } \psi_2(\mathbf{r}) = f_2(r)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x+iy), \text{ mit } \gamma \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

(d) Sind diese Funktionen Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$? Wenn ja, bestimmen Sie die Eigenwerte. Benutzen Sie dazu die explizite Darstellung des Drehimpulsoperators im Ortsraum aus den Aufgabenteilen (b) und (c).

(e) Berechnen Sie schließlich die Erwartungswerte von $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ in diesen beiden Zuständen. Für diesen Aufgabenteil können Sie verwenden, dass die Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ sind. **Hinweis:** Es ist *sehr* hilfreich den Winkelanteil der Wellenfunktionen $\psi_n(\mathbf{r})$ durch Kugelflächenfunktionen darzustellen.