Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Dr. Alexander Carmele, Dr. Julia Kabuß, Dr. Steffen Martens, Jan Totz, M.Sc.

5. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 24.11.2014 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Operatoren in zweiter Quantisierung: Fermionische Operatoren*

Analog zu den bosonischen Kommutatorrelationen in Aufgabe 7, betrachten wir nun fermionische Anti-Vertauschungsrelationen.
In der zweiten Quantisierung werden für das Schrödingerfeld

(1) $$\psi(\vec{r},t) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) a_i(t), \quad \psi^\dagger(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i^*(\vec{r}) a_i^+(t)$$

die nachfolgenden Vertauschungsrelationen eingeführt:

(2) $$\{\psi(\vec{r},t), \psi^\dagger(\vec{r}\,',t)\} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad \text{Fermionen.}$$

Im Heisenberg-Bild wird die Zeitabhängigkeit von $\psi(\vec{r},t)$ von den Operatoren $a_i^+(t)$ getragen.

1. Zeigen Sie explizit durch Einsetzen, dass die fermionische Anti-Vertauschungsrelationen $\{a_i, a_j^+\} = \delta_{i,j}$ erfüllt wird.

2. Betrachten Sie den Mehrteilchenzustand $\phi_n = \Pi_l (a_l^+)^{n_l} \phi_0$, wobei $n_l \in \{0,1\}$ und ϕ_0 der fermionische Grundzustand ist. Zeigen Sie ferner, dass

   (3) $$\langle \phi_n | a_i^+ a_j | \phi_n \rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j, \\ n_i & , i = j, \end{cases}$$

   gilt.

3. Berechnen Sie nun auch für fermionische Operatoren a und a^+ mit $H_H = H_0$:

   (4) $$f(\alpha_i) \equiv U^\dagger a_i^+ U$$

   unter Benutzung der fermionischen Anti-Vertauschungsrelationen in 1) und der Tatsache dass für fermionische Operatoren $(a^+)^n = a^n = 0$ $(n > 1)$ gilt. Bilden Sie wieder wie in Aufgabe 7.3) eine Differentialgleichung für $f(\alpha_i)$.

Aufgabe 12 (5 Punkte): *2-Teilchen-Operator in zweiter Quantisierung*

Zeigen Sie folgende Form des 2-Teilchen-Operator in zweiter Quantisierung

(5) $$\hat{H}_{12} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\lambda'//\mu,\mu'} \langle \lambda'\mu' | V_{12} | \lambda\mu \rangle a_{\lambda'}^+ a_{\mu'}^+ a_\mu a_\lambda,$$

unter Verwendung von

(6) $$\langle \lambda'\mu' | V_{12} | \lambda\mu \rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \mathrm{d}^3\vec{r}_2\, \phi_{\lambda'}^*(\vec{r}_1) \phi_{\mu'}^*(\vec{r}_2) V_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \phi_\lambda(\vec{r}_1) \phi_\mu(\vec{r}_2).$$

Aufgabe 13 (5 Punkte): *Hüpfende Elektronen*
Elektronen im Kristall, die nur schwach von den Rumpfatomen angezogen werden, können so beschrieben werden, als hüpfen sie von Gitterplatz zu Gitterplatz (der Gitterabstand a ist zur Vereinfachung auf $a = 1$ gesetzt). Am gebräuchlichsten ist es, nur das Hüpfen zwischen nächsten Nachbarn zu betrachten. Der Hamiltonoperator lautet dann

$$\hat{H} = t \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1} \right) ,$$

wobei j die Gitterplätze sind.

a) Diagonalisieren Sie den gegebenen Hamiltonoperator mit Hilfe einer diskreten Fouriertransformation, bringen Sie ihn also auf die Form $\hat{H} = \sum_k \epsilon_k a_k^+ a_k$. Hierzu verwenden wir die Fermionoperatoren a_k der ebenen Wellen mit Impuls k, mit denen gilt: $a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{\imath k \cdot j} a_k$, wobei N die Anzahl der Gitterplätze ist. Wir benötigen die Relation $\sum_j e^{\imath (k-k')j} = N \delta_{k,k'}$.

b) Wir können auch das Hüpfen zwischen übernächsten Nachbarn mitnehmen, indem wir schreiben

$$\hat{H} = t \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1} \right) + t' \sum_j \left(a_{j+2}^+ a_j + a_j^+ a_{j+2} \right) .$$

Wie ändert sich jetzt ϵ_k?

Vorlesung:

- Dienstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Tutorien:

- Mi. 08–10 Uhr im EW 731
- Do. 10–12 Uhr im EW 229
- Do. 12–14 Uhr im EW 731
- Fr. 12–14 Uhr im EW 731.

Sprechzeiten:

- Mi. 14–15 Uhr im EW 704 bei Alexander Carmele
- Fr. 14–15 Uhr im EW 703 bei Julia Kabuß
- Do. 15–16 Uhr im EW 737 bei Steffen Martens
- Do. 15–16 Uhr im EW 627 bei Jan Totz

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).