Prof. Dr. Harald Engel
Jan F. Totz, MSc

6. Übungsblatt – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Fr. 13.12.2013 10:00 Uhr vor der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 10 (5 Punkte): *Turing Instabilität*
Gegeben sei folgendes Reaktions-Diffusionssystem:

$$\dot{u} = \frac{u^2}{v} - bu + \nabla^2 u, \tag{1}$$
$$\dot{v} = u^2 - v + d\nabla^2 v. \tag{2}$$

Dabei sind b und d positive Parameter.

(a) Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse durch und zeigen Sie, dass es im diffusionslosen System keine oszillatorischen Lösungen gibt, falls $b < 1$.

(b) Bestimmen Sie unter welchen Bedingungen Diffusion den stationäre Zustand destabilisiert. Zeichnen sie im (b,d)-Parameterraum die Bereiche in denen die Instabilität auftritt. Welche kritische Wellenzahl k_c ist mit der Bifurkation verbunden?

Aufgabe 11 (5 Punkte): *Musterbildung im endlichen Medium*
Das Schnakenberg-Modell (1979) beschreibt eine vereinfachte chemische Reaktionskinetik, die periodisch-oszillierende Lösungen aufweist. Mit Diffusion erhält man folgende Reaktions-Diffusions-Gleichungen:

$$\dot{u} = \gamma\left(a - u + u^2 v\right) + \nabla^2 u, \tag{1}$$
$$\dot{v} = \gamma\left(b - u^2 v\right) + d\nabla^2 v. \tag{2}$$

. Untersuchen Sie im Folgenden, welche Muster bei dieser Reaktion in einem zweidimensionalen Medium selbstorganisiert entstehen können.

(a) Bestimmen Sie die rotationssymmetrischen Eigenfunktionen $\underline{\mathsf{W}}$ und Eigenwerte k^2 für die Laplace-Gleichung auf der Kreisfläche mit Radius R, gegeben durch

$$\nabla^2 \underline{\mathsf{W}} + k^2 \underline{\mathsf{W}} = 0, \tag{3}$$
$$(\underline{\mathsf{n}} \cdot \nabla)\underline{\mathsf{W}} = 0 \quad \text{(Randbedingung)}\ . \tag{4}$$

.

(b) Das Intervall der instabilen Wellenzahlen k^2 sei gegeben durch $\gamma L(a,b,d) < k^2 < \gamma M(a,b,d)$, wobei a, b, d, γ positive Parameter sind und für die Grenzen gilt:

$$L(a,b,d) = \frac{\left[d(b-a) - (a+b)^3\right] - \sqrt{[d(b-a) - (a+b)^3]^2 - 4d(a+b)^4}}{2d(a+b)}, \tag{5}$$
$$M(a,b,d) = \frac{\left[d(b-a) - (a+b)^3\right] + \sqrt{[d(b-a) - (a+b)^3]^2 - 4d(a+b)^4}}{2d(a+b)}. \tag{6}$$

Bestimmen Sie den kritischen Radius R_c der Fläche, unterhalb dessen es zu keiner räumlichen Musterbildung kommen kann. Skizzieren Sie das ausgebildete Muster für $R \gtrapprox R_c$.

6. Übung TPVI WS13/14

Aufgabe 12 (5 Punkte): *Bedingung für räumliche Musterbildung*
Betrachten Sie folgendes generisches Reaktions-Diffusionsmodell:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{f}(\underline{u}) + D\nabla^2\underline{u}. \tag{7}$$

Hierbei beschreibt $\underline{u}$ einen Vektor, dessen n Komponenten die verschiedenen Konzentrationen darstellen, D ist eine diagonale Diffusionsmatrix mit Einträgen d_i und $\underline{f}$ bestimmt die nichtlineare Reaktionskinetik. Die Dynamik findet auf einer offenen Mannigfaltigkeit B statt. Bezeichnen Sie die Eigenwerte als λ_i^+ (mit Diffusion) und λ_i^- (ohne Diffusion). Die Turing-Instabilität tritt auf, falls $\mathrm{Re}\lambda_i^- < 0$ und mindestens ein $\mathrm{Re}\lambda_i^+ > 0$ für ein $k^2 \neq 0$. Zeigen Sie, dass gilt $\mathrm{Re}\lambda_i^+ < 0$, falls alle Einträge der Diffusionsmatrix identisch sind: $d_i = d$.
Somit muss als notwendige Bedingung für das Auftreten von diffusionsgetriebenen Instabilitäten gelten, dass sich mindestens ein Diffusionskoeffizient von den anderen unterscheidet.
Tipp: $|A - \lambda I| = |T^{-1}(A - \lambda I)T| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^- - \lambda)$.

Aufgabe 13 (5 Punkte): *Vorlesungsnachbearbeitung*
Beweisen Sie die in der Vorlesung in Kapitel 4.2 verwendeten Relationen (1) und (4), sowie für die Grenzen des Bandes instabiler Moden $k_{1,2}$ für $d > d_{cr}$.

Vorlesung:	• Do 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. • Fr 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
Übung:	• Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 114.
Website:	• http://www.tu-berlin.de/?137712
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems (Springer)
- J. L. Klimontovich, Statistical Physics (Harwood Academic Publishers)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations (Wiley)
- G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems (Wiley)
- J. D. Murray, Mathematical Biology (Springer)
- A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Chaikin, Theorie der Schwingungen (Teile I und II) (Akademie-Verlag)
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions (Springer)
- H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics (Springer)
- Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos (Westview Press)