Prof. Dr. Harald Engel
Jan F. Totz, MSc

7. Übungsblatt – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Fr. 20.12.2013 10:00 Uhr vor der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 14 (7 Punkte): *Ausbreitungsgeschwindigkeit der Pest*

Betrachte folgendes zweikomponentige Reaktions-Difffusions-System als Modell für die Ausbreitung einer Epidemie

$$\partial_t S(x,t) = -rI(x,t)S(x,t) + D\partial_x^2 S(x,t), \tag{1}$$

$$\partial_t I(x,t) = rI(x,t)S(x,t) - aI(x,t) + D\partial_x^2 I(x,t). \tag{2}$$

Dabei steht I (infected) für die Dichte der von der Krankheit Infizierten und S (susceptibles) für die Dichte der Anfälligen, r ist ein Maß für die Ansteckungswahrscheinlichkeit, $1/a$ ist die Lebenserwartung eines Infizierten und D der Diffusionskoeffizient.

Reskalieren Sie die Gleichungen mit $S = S_0\tilde{S}$ auf die Form

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{S}\,(\tilde{x},\tilde{t}) = -\tilde{I}(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}^2}\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{t}), \tag{3}$$

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{I}(\tilde{x},\tilde{t}) = \tilde{I}(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{t}) - \lambda\tilde{I}(\tilde{x},\tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}^2}\tilde{I}(\tilde{x},\tilde{t}) \quad \text{mit } \lambda = \frac{a}{rS_0}. \tag{4}$$

Gehen Sie in ein mitbewegtes Koordinatensystem $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t}$ über und nehmen Sie an, dass die Pulsprofile in diesem Koordinatensystem stationär sind. Dies führt auf zwei gekoppelte ODEs mit den Randbedingungen

$$\tilde{I}(-\infty) = \tilde{I}(\infty) \ \text{ und } \ 0 \le \tilde{S}(-\infty) < \tilde{S}(\infty) = 1. \tag{5}$$

Linearisieren Sie die Gleichungen um $\tilde{S} \to 1$ und $\tilde{I} \to 0$ und bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\tilde{c} = -\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} > 0$ in reskalierten Größen. (Die linearisierte Gleichung für $\tilde{I}$ ist diejenige eines gedämpften harmonischen Oszillators. Der aperiodische Grenzfall tritt für einen bestimmten Wert von $\tilde{c}$ auf, welcher der gesuchten Geschwindigkeit entspricht.) Unter welchen Bedingungen für λ existieren diese Wellen? Wie kommt man auf die Geschwindigkeit,

$$c = 2\sqrt{D}\sqrt{rS_0 - a}, \tag{6}$$

in unskalierten Größen? Interpretieren Sie die Bedingung für λ in unskalierten Größen. Jetzt soll die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Pestwelle in Europa um 1350 abgeschätzt werden. Eine Bevölkerung von $80.000.000$ Menschen war auf der Fläche West- und Mitteleuropas von $1.583.000\ km^2$ verteilt. Die durchschnittliche Lebenserwartung einer von der Pest befallenen Rattenkolonie ist 24 Tage, was auch für den Menschen angenommen wird. Der Diffusionskoeffizient D sei als $22.500\ km^2/a$ gegeben und r wird zu $r = 1\ km^2/a$ abgeschätzt. Das Ergebnis $c \approx 1800\ km/a$ kann z. B. hier http://en.wikipedia.org/wiki/File:Blackdeath2.gif oder hier http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Pestilence_spreading_1347-1351_europe.png&filetimestamp=20100121131823 verglichen werden.

7. Übung TPVI WS13/14

Aufgabe 15 (13 Punkte): *Pulsausbreitung im Rinzel-Keller Model der Nervenleitung*
Ein analytisch lösbares Modell zur elektrischen Leitung in Nervenbahnen wurde 1973 von Rinzel und Keller vorgeschlagen (Rinzel, Keller: "Traveling wave solutions of a nerve conduction equation", Biophys. J. 13, 1313 (73)):

$$\partial_t u = \partial_x^2 u - f(u) - v, \tag{1}$$

$$\partial_t v = bu \tag{2}$$

$$\text{mit } f(u) = u - H(u-a) = \begin{cases} u & , u \leq a \\ u-1 & , u > a \end{cases} \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie das stationäre Pulsprofil, indem Sie die TWODE in den stückweise stetigen Bereichen lösen und die Sprungbedingung bei $u = a$ auswerten.

(b) Vergleichen Sie das gefundene Profil mit einer numerischen Lösung (shooting Verfahren, siehe Vorlesung).

Vorlesung:	• Do 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. • Fr 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
Übung:	• Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 114.
Website:	• http://www.tu-berlin.de/?137712
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems (Springer)
- J. L. Klimontovich, Statistical Physics (Harwood Academic Publishers)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations (Wiley)
- G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems (Wiley)
- J. D. Murray, Mathematical Biology (Springer)
- A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Chaikin, Theorie der Schwingungen (Teile I und II) (Akademie-Verlag)
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions (Springer)
- H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics (Springer)
- Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos (Westview Press)