Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Dr. Alexander Carmele, Dr. Julia Kabuß, Dr. Steffen Martens, Jan Totz, M.Sc.

8. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 15.12.2014 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 19 (8 Punkte): *Reine und gemischte Zustände*
Sei $\hat{\rho}$ Dichteoperator auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, also $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$, $\hat{\rho} > 0$, mit Spur $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$. $\hat{\rho}$ beschreibt einen reinen Zustand, wenn $\hat{\rho}$ in der Form $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\|\psi\| = 1$, $\psi \in \mathcal{H}$, geschrieben werden kann.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}$ genau dann rein ist, wenn $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich jeder Dichteoperator als Summe reiner Zustände schreiben lässt, d.h. $\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, wobei $\sum_i \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \geq 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie anhand eines Beispieles, dass die Zerlegung eines Dichteoperators in reine Zustände i.A. *nicht eindeutig* ist. (Tipp: mischen Sie zwei nicht-orthogonale reine Zustände).

(d) Der Erwartungswert einer Observablen ist durch

$$\langle \mathrm{A} \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\mathrm{A})$$

definiert. Motivieren Sie diese Definition indem Sie λ_i in (b) als statistische Wahrscheinlichkeit für den Zustand $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ auffassen. Warum ist $\langle \mathrm{A} \rangle$ unabhängig von der gewählten Zerlegung von $\hat{\rho}$ in reine Zustände?

(e) Zeigen Sie mittels einer Zerlegung in reine Zustände, dass $\hat{\rho}(t)$ die $\textsc{Liouville}$-Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = [\mathrm{H}, \hat{\rho}(t)]$$

erfüllt, wobei H der Hamiltonoperator ist. Worin liegt der Unterschied zur Heisenbergschen Bewegungsgleichung?

Aufgabe 20 (12 Punkte): *Rabioszillationen*
Betrachten Sie ein Elektron in einem quantenmechanischen Zwei-Niveau-System. Dieses kann sich entweder im Grundzustand V aufhalten oder aber den angeregten Zustand C einnehmen. Die optische Anregung erfolgt hierbei über das externe zeitabhängige Potential $U = \vec{\mu} \cdot \vec{E}(t)$, wobei $\vec{\mu} = -\vec{p}$ das negative elektrische Dipolmoment $\vec{p}$ und $\vec{E}(t)$ ein äußeres elektrische Feld sind. Für die Elektronenbesetzungswahrscheinlichkeiten gilt $f_C^e + f_V^e = 1$. Die Dynamik des Systems wird durch die Halbleiter-Bloch-Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_C^e &= -i\Omega_p(p - p^*) = +2\,\mathrm{Im}[\Omega_p p], \\ \frac{d}{dt}\, p &= -i\omega_p p - i\Omega_p(f_C^e - f_V^e), \end{aligned}$$

mit der Rabifrequenz $\Omega_p(t) = \frac{1}{\hbar}\vec{\mu} \cdot \vec{E}(t)$ und der optischen Übergangsfrequenz $\omega_p = \frac{1}{\hbar}(E_C - E_V)$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

(a) Interpretieren Sie die auftretenden Größen physikalisch.

(b) Die Einhüllende $\tilde{\Omega}(t)$ der Rabifrequenz sei durch $\Omega_p(t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}(t)e^{-i\omega_T t} + \tilde{\Omega}^*(t)e^{i\omega_T t}\right)$ definiert, wobei ω_T gerade die Frequenz der Trägerschwingung der Anregung ist. Desweiteren sei $\tilde{p} = pe^{i\omega_T t}$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung in diesen langsam rotierenden Größen und führen Sie die sogenannte Rotating-Wave-Approximation (RWA) durch, indem Sie Rotationen mit doppelter Lichtfrequenz streichen. Mit der Verstimmungsfrequenz $\delta = \omega_T - \omega_p$ führt dies zu:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{p} &= i\,\tilde{p}\,\delta + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(t)(1 - 2f_C^e)\,, \\
\frac{d}{dt}f_C^e &= \mathrm{Im}\left[\tilde{\Omega}^*(t)\tilde{p}\right].
\end{aligned}$$

(c) Betrachten Sie den Fall resonanter Anregung ($\delta = 0$) mit reellem $\tilde{\Omega}(t)$:

1. Verifizieren Sie, dass $\tilde{p}(t) = \frac{i}{2}\sin\theta(t)$ mit der Pulsfläche $\theta(t) = \int_{-\infty}^{t}\tilde{\Omega}(t')dt'$ eine Lösung des Differentialgleichungsystems ist und geben Sie $f_C^e(t)$ an.
2. Diskutieren Sie die Lösung ausführlich. In welchem Zustand befindet sich das System, wenn die Pulsfläche θ gerade die Werte $\frac{\pi}{2}, \pi$ und 2π annimmt? [Anfangsbedingung hier und für den folgenden Aufgabenteil: $f_C^e(-\infty) = \tilde{p}(-\infty) = 0$].
3. Bestimmen Sie für einen Puls der Form

$$\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} \frac{A\pi}{2\tau}\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) & \text{für } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die analytische Lösung. Plotten Sie $f_C^e(t)$ und $\mathrm{Im}[\tilde{p}(t)]$ im Bereich von $t = [-10\,\mathrm{ps}, 10\,\mathrm{ps}]$ für $\tau = 5\,\mathrm{ps}$ und $A = 3\pi$.

Vorlesung:	• Dienstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203. • Donnerstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
Tutorien:	• Mi. 08–10 Uhr im EW 731 • Do. 10–12 Uhr im EW 229 • Do. 12–14 Uhr im EW 731 • Fr. 12–14 Uhr im EW 731.
Sprechzeiten:	• Mi. 14–15 Uhr im EW 704 bei Alexander Carmele • Fr. 14–15 Uhr im EW 703 bei Julia Kabuß • Do. 15–16 Uhr im EW 627 bei Steffen Martens • Do. 15–16 Uhr im EW 627 bei Jan Totz
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien. • Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).