

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
UE: Dr. Anna Zakharova, M.Sc. Jan Tötz

5. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi 27.05. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.
Bitte den Source-Code mit ausdrucken.

Aufgabe 9 (10 Punkte): Euler-Methode für Delay-Differentialgleichungen

In dieser Aufgabe soll die folgende Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + \omega y - K [x(t) - x(t - \tau)], \\ \dot{y} &= -\omega x + \lambda y - K [y(t) - y(t - \tau)],\end{aligned}$$

numerisch gelöst werden.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und zeigen Sie, dass $K \geq \lambda/2$ eine notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Fixpunktes ist.
2. Integrieren Sie das System mit $\lambda = 0.5$ und $\omega = \pi$ numerisch und plotten Sie die Trajektorien für $K = 0$, $K = 0.2$, $K = 0.25$ und $K = 0.3$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differentialgleichung

$$\dot{X} = f[X(t), X(t - \tau)]$$

ist gegeben durch

$$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n, X_{n-\Delta}],$$

wobei $\Delta = \tau/dt$.

- Um den Delay-Term auswerten zu können muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die x und y Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind fangen Sie von vorne an).
Tipp: Verwenden Sie die Modulo-Operation `%`.
- Lassen Sie das System von $t = 0$ bis $t = \tau$ ohne Kontrolle ($K = 0$) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.
- Speichern Sie die berechneten x und y Werte in entsprechenden Ausgabearrays und plotten Sie dann die Phasenportraits wie in Fig. 1 aus der VL.

Bitte Rückseite beachten! →

5. Übung SS 2015

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Optimalkontrolle*

Ein Raum soll von 0°C zum Zeitpunkt $t = 0$ auf ungefähr 20°C zum Zeitpunkt $t = t_f$ geheizt werden. Die Änderung der Temperatur T wird dabei durch die folgende DGL beschrieben

$$\dot{T}(t) = -aT(t) + bu(t), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

wobei a die Wärmeverlustrate ist und $u(t)$ die pro Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge.

- Finden Sie das optimale u_* , welches das folgende Kostenfunktional minimiert:

$$\mathcal{I}[T(t), u(t)] = s/2(T(t_f) - 20)^2 + 1/2 \int_0^{t_f} u(t)^2 dt$$

mit $s \in \mathbb{R}$ als Fehlertoleranzparameter.

Interpretieren Sie auch die einzelnen Terme von \mathcal{I} .

- Finden Sie das zu $u_*(t)$ zugehörige $T_*(t)$, das Gl. (1) löst.
- Falls noch nicht erfolgt: Bestimmen Sie auch alle vorkommenden Integrationskonstanten.