Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

10. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 26.06.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

M Aufgabe 29: *Quizshow*

In einer Quizshow wird ein bekanntes Spiel gespielt: Ein Kanditat steht vor drei verschlossenen Türen, wobei hinter einer Tür ein Gewinn verborgen ist, und hinter den anderen beiden kein Gewinn. Die Gewinnchance soll für alle Türen gleich sein, das heißt, der Gewinn wird zufällig plaziert, wobei der Quizmaster weiß, hinter welcher er sich verbirgt.
Nun entscheidet sich der Kandidat für eine Tür, diese wird allerdings vorerst nicht geöffnet. Nun öffnet der Quizmaster eine der beiden anderen Türen, wo kein Gewinn dahinter steht. Das heißt, der Gewinn muss entweder hinter der vom Kandidaten gewählten Tür sein, oder in der anderen nicht geöffneten Tür.
Nun bietet der Quizmaster dem Kandidaten an, von der einen Tür zur anderen zu wechseln. Soll er dies tun, oder bei seiner ersten Entscheidung bleiben, um seine Gewinnchance zu erhöhen, oder ist es egal, für welche er sich entscheidet? Begründen Sie Ihr Ergebnis!

S Aufgabe 30 (5 Punkte): *Zeitskalen der Brownschen Bewegung*

(a) Die eindimensionalen Langevingleichung für die Geschwindigkeit $\dot{x}(t) = v(t)$ lautet

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) + \Gamma(t) \,, \tag{8.1}$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Zeigen Sie durch Variation der Konstanten, dass die Partikulärlösung der Inhomogenität gegeben ist durch

$$v_{\text{inhom}} = \frac{1}{m}\int_0^t dt' \;\; \Gamma(t')\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} \;.$$

und berechnen Sie die allgemeine Lösung.

(b) Berechnen Sie auch eine allgemeine Lösung für den Ort $x(t)$, wenn das Probeteilchen bei x_0 startet. Nutzen Sie dafür

$$\int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \;\; \Gamma(t')\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t''-t')} = \frac{m}{\gamma}\int_0^t dt' \;\; \Gamma(t')\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')}\right) \;.$$

(c) Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der mittleren quadratischen Abweichung des Ortes $\left\langle (x(t) - x_0)^2 \right\rangle$, skizzieren Sie diese und betrachten Sie die Grenzfälle

1. $t \gg \frac{m}{\gamma}$,
2. $t \ll \frac{m}{\gamma}$.

Verwenden Sie

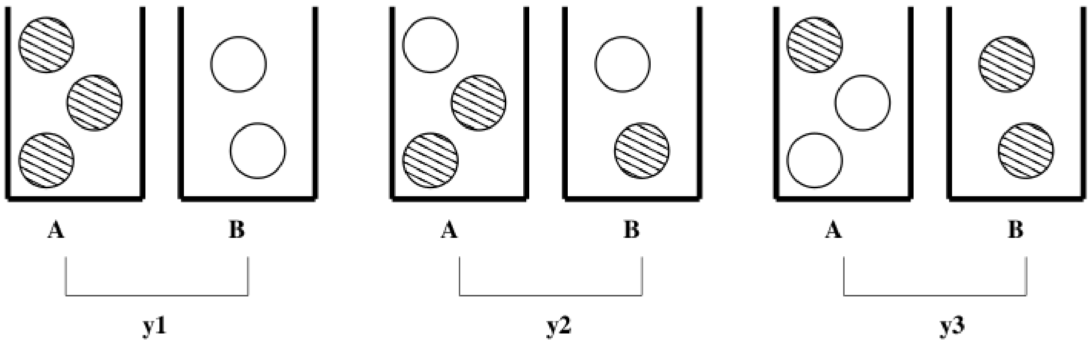
$$\begin{aligned} \langle \Gamma(t) \rangle &= 0 \,, \\ \left\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \right\rangle &= 2\gamma k_B T \; \delta(t - t') \,. \end{aligned}$$

(d) 1. Wie lässt sich dieses Verhalten (nach einem kurzen bzw. langen Zeitraum) physikalisch erklären? Gehen Sie in ihrer Antwort (in zwei Sätzen!) auf die mikroskopischen Vorgänge ein, die in der Brownschen Dynamik relevant sind.

2. Was ist in der mathematischen Beschreibung der wesentliche Unterschied zwischen einer Brownschen und ballistischen Bewegung? Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage (in einem Satz!) die mittlere quadratische Abweichung des Ortes eines gleichförmig bewegten Massepunktes.

S **Aufgabe 31 (5 Punkte):** *Markov Prozess*

Betrachten Sie zwei Töpfe A und B, in denen drei rote und zwei weiße Bälle derart verteilt sind, dass A stets drei und B stets zwei Bälle enthält. Es gibt, wie unten dargestellt, drei verschiedene Konfigurationen y_i mit $i = 1, 2, 3$, die auseinander hervorgehen, wenn man zufällig jeweils einen Ball aus den Töpfen A und B zieht und miteinander vertauscht. Bestimmen Sie die $3 \times 3 -$ Matrix



$\mathbf{Q}$ der Übergangswahrscheinlichkeiten, mit den Einträgen

$$Q_{i,j} = P\,(y_i, s \,|\, y_j, s{+}1)$$

welche die bedingten Wahrscheinlichkeiten angeben, dass das System bei einem Kugeltausch von Konfiguration y_i zur Zeit s zu y_j zur Zeit $s+1$ wechselt.
Bestimmen Sie $\mathbf{Q}^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{Q}^N$, wenden Sie $\mathbf{Q}^\infty$ auf verschiedene Anfangszustände (bezüglich der Basis y_i) an und interpretieren Sie das Ergebnis.

M **Aufgabe 32**: *Charakteristische Funktion*

Die Fouriertransformierte einer Verteilung $P(x)$ (bzw. den Erwartungswert $\langle e^{-ikx}\rangle$) nennt man charakteristische Funktion:

$$G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} P(x)\;.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \left.\frac{d^n G(k)}{dk^n}\right|_{k=0}\;,$$

und erläutern Sie, dass bei Kenntniss aller $\langle x^n\rangle$, die Verteilung $P(x)$ eindeutig bestimmt ist.

(b) Berechnen Sie $G(k)$ für die Exponentialverteilung:

$$P_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\;,$$

und berechnen Sie damit $\langle x \rangle$.