

## 2. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

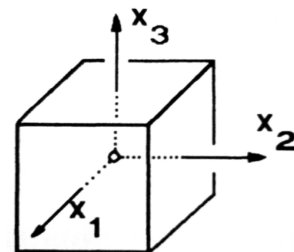
Abgabe/Vorrechnen: Mi. 24.04.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

### M Aufgabe 4: Drehungen in $\mathbb{R}^3$

- (a) Finden Sie die Drehmatrix  $\underline{A}$  mit der Drehachse  $\{1, 1, 1\}$  und dem Drehwinkel  $\frac{2\pi}{3}$ . Erläutern Sie das Ergebnis graphisch.
- (b) Die Drehachse einer Drehmatrix ist ihr Eigenvektor zum Eigenwert 1. Bestimmen Sie die Drehachse von  $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie  $\det \underline{B}$  und  $\underline{B}^T \underline{B}$  und zeigen Sie, dass  $\underline{B}^T = \underline{B}^{-1}$ .
- (c) Welcher Tensor zweiter Stufe ist invariant unter beliebigen Drehungen im  $\mathbb{R}^3$ ? Beweisen Sie Ihre Behauptung.
- (d) Zeigen Sie explizit anhand eines beliebigen Tensors zweiter Stufe in  $\mathbb{R}^3$ , dass die Spur invariant unter einer Drehung um den Winkel  $\alpha$  um die z-Achse ist.

### S Aufgabe 5 (4 Punkte): Würfel

Die Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  aus Aufgabe 4 beschreiben jeweils Drehungen, die den Würfel mit den acht Ecken  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  in sich überführen.



- (a) Berechnen Sie  $\underline{B}^2$ ,  $\underline{B}^3$ , .... Welchen Drehwinkel hat somit  $\underline{B}$ ?
- (b) Berechnen Sie  $\underline{A}\underline{B}$  und  $\underline{B}\underline{A}$  sowie die zugehörigen Drehachsen und Drehwinkel.
- (c) Durch geeignete Produkte von  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  erhält man alle 24 Drehungen, die den Würfel in sich abbilden. Welche grundsätzlichen Arten von Drehungen gibt es und warum sind es 24?

### S Aufgabe 6 (6 Punkte): Konvektionsformel

- (a) Geben Sie ein eindimensionales Geschwindigkeitsfeld an, dessen materielle Beschleunigung null ist und dessen konvektive Ableitung nicht verschwindet. Interpretieren Sie nun allgemein die konvektive Beschleunigung  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ : In welche Richtung weist die konvektive Beschleunigung bei konstantem Betrag eines Geschwindigkeitsfeldes? Was geschieht, wenn das Geschwindigkeitsfeld zusätzlich auch noch wirbelfrei ist?

2. Übung SP WS12

(b) Skizzieren Sie die angegebenen Geschwindigkeitsfelder und bestimmen Sie die *Bahnlinie*  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ , sowie Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, t)$  und Beschleunigung  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}, t)$  des materiellen Punktes  $\boldsymbol{\xi}$ .

(i)  $v_1 = kx_1, v_2 = v_3 = 0; k \geq 0.$

(ii)  $v_i = kx_i/(1 + t/t_0); i = 1, 2, 3; k, t, t_0 \geq 0.$

(c) *Stromlinien* sind definiert als die Feldlinien des momentanen Geschwindigkeitsfeldes. Welche Beziehung besteht zwischen den Stromlinien und den Bahnlinien für die Geschwindigkeitsfelder aus Aufgabenteils (b)?