Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

3. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 08.05.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

M **Aufgabe 7**: *Deformation und Drehung*

Gegeben sei das folgende Geschwindigkeitsfeld in $\mathbb{R}^2$ $(\gamma > 0)$:

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \gamma y \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld und berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ sowie den Drehgeschwindigkeitstensor $\mathbf{W}$.

(b) Finden Sie eine geeignete Basis, in der $\mathbf{A}$ diagonal wird und interpretieren Sie die Eigenwerte.

(c) Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{W} = 0$ erfüllt, mit $\mathbf{A}$ wie in (a).

(d) Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{A} = 0$ erfüllt, mit $\mathbf{W}$ wie in (a).

S **Aufgabe 8 (5 Punkte):** *Wirbelstärke*

Die Wirbelstärke $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ stellt eine zentrale Größe der Hydrodynamik dar und kann anschaulich als die Tendenz eines Fluidelements zur Eigendrehung um eine Achse beschrieben werden.

(a) Leiten Sie ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p \,,$$

folgende Gleichung für die Wirbelstärke ω her:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) \tag{1}$$

In dieser Aufgabe sollen zweidimensionale inkompressible Flüssigkeiten (d.h. solche mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) untersucht werden. Das Geschwindigkeitsfeld einer solchen Flüssigkeit lässt sich darstellen als

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\Phi(x, y, t)\mathbf{e}_z) \,, \tag{2}$$

mit der sog. Strömungsfunktion $\Phi(x, y, t)$.

(b) Leiten Sie eine Differentialgleichung für $\Phi(x, y, t)$ her.

(c) Im Folgenden soll nun eine stationäre Strömungsfunktion $\Phi(x, y, t) \equiv \Phi(x, y) \equiv \Phi(|\mathbf{r}|)$ betrachtet werden.

(i) Es gelte $\omega = 0$. Welche Differentialgleichung erhalten Sie nun für Φ?. Lösen Sie diese Gleichung und finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.

(ii) Es gelte $|\omega| = 2\omega_0 = const.$. Finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$. Ist diese Lösung auch Lösung der Gleichung aus (i)?

(d) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ sowie den Drehgeschwindigkeitstensor $\mathbf{W}$ für beide Fälle und erläutern Sie den qualitativen Unterschied.

S **Aufgabe 9 (5 Punkte):** *Kontinuitätsgleichungen*
In der Vorlesung wurden die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie mechanischer Systeme hergeleitet. Damit lassen sich auch Kontinuitätsgleichungen weiterer Erhaltungsgrößen herleiten.

1. Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her.
   Benutzen Sie nun das Vorgehen der Vorlesung für eine alternative Herleitung.

2. Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet $\mathrm{u} = \frac{\epsilon_0}{2}\,\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\,\mathbf{B}^2$.
   Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwell-Gleichungen bzw. mit dem Vorgehen der Vorlesung gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen.

3. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle?

4. Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die mechanische Impulsdichte $p = \rho\,\mathbf{v}$ aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme.