Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 8. Mai 2013
http://www.tu-berlin.de/?131892

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

4. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 15.05.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

M **Aufgabe 10**: *Spannungstensor einer Newtonschen Flüssigkeit*

Der Spannungstensor $\mathbf{T}$ einer Newonschen Flüssigkeit ist gegeben durch

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^0 + \mathbf{T}' \,, \tag{3.40}$$

wobei der statische Anteil durch $\mathbf{T}^0 = -p\mathbf{1}$ mit dem Druck p gegeben ist und der dissipative Anteil durch die Viskositäten η und η' und der Deformationsrate A:

$$\mathbf{T}' = 2\eta\mathsf{A} + \eta'\mathbf{1}\mathrm{Sp}\mathsf{A}. \tag{3.56}$$

(a) Zerlegen Sie $\mathbf{T}'$ in einen spurlosen Anteil und einen Anteil mit nichtverschwindender Spur und zeigen Sie, dass:

$$\eta \geq 0, \quad \eta' + \frac{2}{3}\eta \geq 0 \,. \tag{3.58}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathsf{v} + (\eta + \eta')\nabla(\nabla \cdot \mathsf{v}) \,. \tag{3.61}$$

M **Aufgabe 11**: *Thermodynamik isotroper Flüssigkeiten*

Für kanonische Ensembles wird die freie Energie F (als Funktion der Temperatur *T*, Teilchenanzahl *N* und Volumen *V*) als thermodynamisches Potential verwendet. Die spezifische Freie Energie f ist dann definiert über $F = \int \rho f d^3x$ mit der Massendichte ρ.

(a) Zeigen Sie, dass für den Druck p gilt:

$$p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \,. \tag{3.39}$$

Berechnen Sie die spezifische Entropie s.

(b) Zeigen Sie, dass für die spezifische innere Energie u in Abhängigkeit von T und ρ gilt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_T = \frac{p}{\rho^2} + T\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T \,. \tag{3.100}$$

Beachten Sie, dass die innere Energie U normalerweise als Funktion von S, V und N gegeben ist. Zeigen Sie ferner, dass folgende Maxwell-Relation gilt:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \,. \tag{3.99}$$

S **Aufgabe 12 (3 Punkte):** *Poinsot'sche Konstruktion*

In der klassischen Mechanik ist die Poinsot'sche Konstruktion eine geometrische Methode zur Visualisierung der Drehmoment-freien Bewegung eines starren Körpers. In dieser Aufgabe soll die Poinsot'sche Konstruktion zur Visualierung des Spannungstensors $\mathbf{T}$ verwendet werden.

(a) Welche Fläche wird durch

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathrm{const}$$

beschrieben? Geben Sie die Gleichung der Fläche als Funktion der Komponenten von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{T}$ an. Diagonalisieren Sie $\mathbf{T}$ und geben Sie die Gleichung der Fläche in dem gedrehten Koordinatensystem, d.h. in dem Koordinatensystem in dem die Hauptachsen die Basisvektoren bilden, an. Fertigen Sie eine Skizze der Fläche an.

(b) Zeigen Sie, dass der Kraftvektor $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ am Ort $\mathbf{x}$ senkrecht auf der Fläche $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathrm{const}$ steht.

S **Aufgabe 13 (7 Punkte):** *Poiseuille Strömung*

Eine wichtige Anwendung der Navier-Stokes-Gleichungen ist die Strömung einer Flüssigkeit durch ein zylindrisches Rohr mit Radius R und Länge L. Wir wollen uns auf den Spezialfall einer laminaren, inkompressiblen, stationären Newtonschen Flüssigkeit mit Viskosität η beschränken. Zusätzlich sollen Gravitationskraft und andere externe Kräfte vernachlässigt werden.

(a) Lösen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen mit den oben angegebenen Voraussetzungen, und bestimmen Sie Druck- und Geschwindigkeitsfeld. Verwenden Sie haftende Randbedingungen. *Hinweis:* Beachten Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld einer realen Flüssigkeit an keinem Ort divergieren darf!

(b) Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Zeiteinheit:

$$Q = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \ ,$$

und zeigen Sie, dass $Q \propto R^4$ (*Hagen-Poiseuillesches Gesetz*).