Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

5. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 22.05.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

S Aufgabe 14 (5 Punkte): *Zirkulare Couette-Strömung*

Im folgenden wollen wir eine Flüssigkeit zwischen zwei koaxialen, unendlich langen Zylindern mit Radien R_1, R_2 betrachten, wobei $R_1 < R_2$. Die beiden Zylinder rotieren dabei mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um ihre ortsfesten Achsen.

(a) Berechnen Sie das Geschwindigkeits- und Druckfeld der Flüssigkeit aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Gehen Sie von einer laminaren, stationären, inkompressiblen Strömung und haftenden Randbedingungen aus und vernachlässigen Sie die Gravitation.

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis für $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ mit den Ergebnissen aus Aufgabe 8 (c). Betrachten Sie die Spezialfälle (i) $\omega_1 = \omega_2$ und (ii) $R_2 \to \infty$, $\omega_2 \to 0$.

M Aufgabe 15: *Diffusionsgleichung für Wirbel*

Die Diffusionsgleichung für Wirbel ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right)\omega = \nabla \times \mathbf{b} \tag{3.72}$$

mit der Diffusionskonstante $D = \eta/\rho_0$ und $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$.

(a) Nehmen Sie nun an, dass eine Störung am Punkt $\mathbf{x}_0$ und zur Zeit $t = 0$ in die Richtung $\mathbf{n}$ wirkt, so dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right)\mathbf{n}\cdot\omega = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\delta(t) \tag{1}$$

und mit $\mathbf{n}\cdot\omega = G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, t)$. Berechnen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, t)$.
Hinweis: Verwenden Sie

$$\int d\mathbf{k}\, dy \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-yt)}}{-iy + Dk^2} = \frac{2\pi^{5/2}}{(Dt)^{3/2}}\exp[-\frac{\mathbf{x}^2}{4Dt}] \, .$$

(b) Beweisen Sie

$$\langle(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2\rangle = \int (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2 G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, t)\, d^3x = 6Dt, \tag{3.75}$$

mittels partieller Integration.
Hinweis: Verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/c^2}\, dy = \sqrt{\pi}|c| \, .$$

S Aufgabe 16 (5 Punkte): *Stokesgleichung aus Variationsprinzip*

Lösungen $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ der Stokeschen Gleichung

$$0 = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{4.1}$$

extremalisieren die Dissipationsleistung des Geschwindigkeitsfeldes

$$W = \int T'_{ij}A_{ij}\mathrm{d}^3x = 2\eta\int A_{ij}^2\mathrm{d}^3x \, , \tag{4.2}$$

wenn zusätzlich gefordert wird, dass die Divergenz des Vektorfelds verschwindet. Deshalb kann die Stokesgleichung auch durch ein Variationsverfahren gewonnen werden. Die Divergenzfreiheit geht mit dem Lagrangeparameter p als Nebenbedingung ein,

$$\delta\left(W - 2\int p\,\nabla\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}^3x\right) = \delta\left(\int 2\eta A_{ij}^2 - 2p\,\nabla\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}^3x\right) = 0\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem äquivalent zu der Stokesgleichung ist, also die Aussage

$$\delta\left(\int 2\eta A_{ij}^2 - 2p\,\nabla\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}^3x\right) = 0 \Leftrightarrow -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} = 0 \tag{4.3}$$

gilt.

(b) Welche Randbedingungen ergeben sich, wenn Sie auf der Oberfläche eine Variation zulassen ($\delta\mathbf{v}|_{\partial V} \neq 0$) oder verbieten ($\delta\mathbf{v}|_{\partial V} = 0$)?