Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

7. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 05.06.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

S Aufgabe 20 (4 Punkte): *Reibungsmatrix des langen, dünnen, steifen Stabes*

Berechnen Sie die Reibungskoeffizienten eines Stabes der Länge L, der parallel zur x-Achse ausgerichtet ist, und den man sich aus N Kugeln vom Radius R zusammengesetzt denkt, wobei $L \gg 2R$. Die Geschwindigkeit des j-ten Stabsegments $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$ kann man dann als Superposition seiner eigenen Stokes-Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der Strömungen, die die übrigen Kugeln an seiner Stelle verursachen, approximieren. Nimmt man weiterhin die Strömung der übrigen Segmente als Stokeslets $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j)$ an, so erhält man,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_j) = \frac{\mathbf{F}_{seg}}{6\pi\eta R} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j) \,,$$

mit

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j) = \mathbf{O}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\mathbf{F}_{seg} = \frac{1}{8\pi\eta|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}\left(\mathbf{1} + \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x\right)\mathbf{F}_{seg} \,,$$

und der Kraft pro Stabsegment $\mathbf{F}_{seg} = \mathbf{F}_{ges}/N$.

(a) Berechnen Sie $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$, indem Sie die Summe mit Hilfe von $N \gg 1$ in ein Integral überführen und über die gesamte Länge des Stabes (von $-L/2$ bis $L/2$) integrieren, aber das j-te Segment (der Breite $2R$) "überspringen".

(b) Finden sie dann einen Ausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit des Stabes $\mathbf{u}$, indem Sie lediglich Terme der Ordnung $\ln(L/R)$ berücksichtigen.

(c) Zeigen Sie, dass für die Reibungskoeffizienten gilt:

$$2\gamma_{\|} = \gamma_{\perp} = \frac{4\pi\eta L}{\ln(L/R)} \,. \tag{4.43}$$

S Aufgabe 21 (6 Punkte): *Reibungsmatrix der Helix*

Im Folgenden soll die Reibungsmatrix einer Helix in einer Stokeschen Flüssigkeit berechnet werden. Dabei wird angenommen, dass die angreifende Kraft F und das Drehmoment M, sowie die Translations- und Rotationsgeschwindigkeit U und Ω in die Richtung der Helixachse $\mathbf{e}_z$ zeigen. Dann sind (F, M) über eine 2×2 Reibungsmatrix linear mit (U, Ω) verbunden,

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Omega \end{pmatrix} . \tag{4.46}$$

Die Helix ist bei festem Radius R und Ganghöhe p durch den Winkel ϕ parametrisiert,

$$\mathbf{x}(\phi) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ \phi/k \end{pmatrix} , \quad k = 2\pi/p \,.$$

Berechnen Sie nun F und M auf eine Helix der Höhe p ($\phi \in [0, 2\pi]$), indem Sie zuerst U und dann Ω in z-Richtung annehmen. Verwenden Sie $\mathbf{f} = (\eta_{\|}\mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \eta_{\perp}(1 - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}))\mathbf{v}$, wobei $\mathbf{t}$ der Tangentialvektor an die Helix ist, und $\eta_{\|}$, $\eta_{\perp}$ die Reibungskoeffizienten parallel bzw. normal zum Helixsegment sind. Dabei ist $\mathbf{v} = U\mathbf{e}_z$ (Translation) bzw. $\mathbf{v} = \Omega\mathbf{e}_z \times R\mathbf{e}_\rho$ (Rotation). Aus den linearen Beziehungen können Sie nun γ, β und C ablesen.

M **Aufgabe 22**: *Mittlere Geschwindigkeit des Spermiums*
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die ein Spermium durch seine wellenförmige Bewegung erreicht. Verwenden Sie hierzu den Reibungstensors eines langen dünnen Stabes aus Aufgabe 20.

(a) Nehmen Sie an, dass sich das fadenförmige Filament (mit der Länge L) des Spermiums, gemäß einer ebenen Welle, die entgegen der Fortbewegungsrichtung propagiert, d.h. gemäß

$$h(x,t) = b\sin(kx - \omega t)\ , \tag{5.3}$$

deformiert und berechnen Sie die Kraftdichte, die an einem Punkt des Filaments in Schwimmrichtung erzeugt wird.

(b) Integrieren Sie die berechnete Kraftdichte über die Länge des Filaments, nehmen Sie dabei an, dass die Deformationen klein sind und zeigen Sie die Abhängigkeit der erzeugten Kraft von der Filamentlänge.

(c) Sei $\langle u \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit, die sich einstellt, wenn man für die Reibungskraft entgegen der Schwimmrichtung in führender Ordnung $\gamma_{\|} L \langle u \rangle$ berücksichtigt. Zeigen Sie, dass:

$$\langle u \rangle = -\frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\|}}{2\gamma_{\|}} \omega k b^2\ . \tag{5.5}$$

Mitteln Sie dafür die berechnete Reibungskraft über eine sinnvolle Zeitspanne.