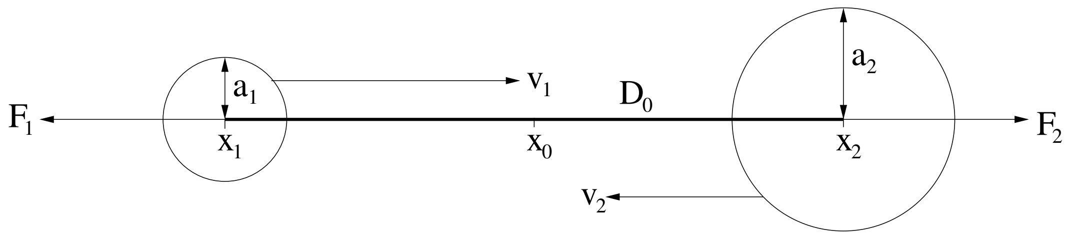
Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

8. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 12.06.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

M **Aufgabe 23**: *Zwei gekoppelte Kugeln*



Zwei Kugeln mit Radien $a_1 \leqslant a_2$ sind durch ein Verbindungsstück der Länge

$$D(t) = D_0 - Ut$$

miteinander verbunden. Für $t > 0$ wird das Verbindungsstück also gleichmäßig verkürzt ($U > 0$) und die Kugeln beginnen sich zu bewegen. Benutzen Sie im Folgenden die Oseen-Näherung

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{\mathbf{F}_i(t)}{6\pi\eta a_i} + \sum_{j\neq i} \mathbf{O}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))\mathbf{F}_j(t)$$

mit $a_1 \leqslant a_2 \ll D(t)$ für hinreichend kleine Zeiten und die Tatsache, dass keine externen Kräfte wirken.

(a) Berechnen Sie die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$.

(b) Zeigen Sie, dass:

$$v_1(t) = -U\frac{2D(t)a_2 - 3a_1a_2}{6a_1a_2 - 2D(t)(a_1 + a_2)} ,$$
$$v_2(t) = +U\frac{2D(t)a_1 - 3a_1a_2}{6a_1a_2 - 2D(t)(a_1 + a_2)} .$$

(c) Zeigen Sie, dass $|v_i| \approx U(1-\frac{a_i}{a_1+a_2})$, solange $D_0 \gg Ut$. Berechnen Sie daraus die Bewegung des Achsenmittelpunktes $x_0(t)$. Was passiert wenn $a_2 \gg a_1$?

S **Aufgabe 24 (6 Punkte):** *Expandierende Kugel*

Es soll das Strömungsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ einer Kugel mit variierendem Radius $R(t)$ bestimmt werden. Nehmen Sie dabei an, dass sich das Volumen gleichmäßig mit der Geschwindigkeit W vergrößert ($W > 0$) bzw. verkleinert ($W < 0$).

(a) Zeigen Sie, dass $R(t) = \left(R^3(0) + \frac{3}{4\pi}tW\right)^{1/3}$.

(b) Zeigen Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld $v_R(t)$ am Rand der Kugel gegeben ist durch

$$v_R(t) = \frac{W}{4\pi R^2(t)}.$$

(c) Berechnen Sie das Strömungsfeld und zeigen Sie, dass es zeitunabhängig ist, solange das Volumen linear vergrößert bzw. verkleinert wird. Skizzieren Sie das Feld für $W > 0$ und $W < 0$.

S **Aufgabe 25 (4 Punkte):** *Zufallsgeher auf kubischem Gitter*

(a) Betrachten Sie ein Teilchen, das in jedem Zeitschritt Δt einen Sprung der Länge a in zufälliger Richtung auf einem kubischen Gitter macht. Sei $p(\mathbf{r}, t)$ die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t am Ort $\mathbf{r}$ auf dem Gitter zu finden. Leiten Sie eine Diffusionsgleichung für $p(\mathbf{r}, t)$ her, in dem Sie in dem Ausdruck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - p(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}$$

$p(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ als Funktion aller $p(\tilde{\mathbf{r}}, t)$ mit $\tilde{\mathbf{r}} \neq \mathbf{r}$ darstellen und Taylor-entwickeln. Was ist die Diffusionskonstante D? Was erhält man auf einem 2D-Gitter, was auf einem 1D-Gitter?

(b) Wie lautet die Fundamentallösung $p(\mathbf{r}, t)$? Was erhält man für den mittleren quadratischen Abstand $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ des Teilchens vom Ursprung?

(c) Betrachten Sie nun eine Polymerkette, die aus N Segmenten der Länge L_{seg} besteht. Die Glieder sollen mit rechten Winkeln verbunden sein. Was erhalten Sie für den mittleren quadratischen End-zu-End-Abstand $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ der Polymerkette?