Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

9. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 19.06.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

M **Aufgabe 26**: *Kugelwettlauf*

In einem Kugelwettrennen werden Kugeln in einem mit Glycerin gefüllten Tank gesetzt. Gewonnen hat, wer am schnellsten eine Kugel auf den Grund des Tanks setzt.

(a) Kandidat 1 setzt auf eine einzelne Kugel. Berechnen Sie die Sinkgeschwindigkeit.

(b) Kandidat 2 setzt 2 Kugeln nebeneinander (Mittelpunktsabstand der Kugeln jeweils der dreifache Kugelradius). Berechnen Sie die Sinkgeschwindigkeit.

(c) Kandidat 3 setzt 2 Kugeln übereinander (Mittelpunktsabstand der Kugeln jeweils der dreifache Kugelradius). Berechnen Sie die Sinkgeschwindigkeit.

Hinweis: Nutzen sie die Rotne-Prager-Näherung für die hydrodynamische Wechselwirkung translatierender Kugeln in hochviskosen Flüssigkeiten. Danach gilt für die Geschwindigkeit einer Kugel bei $\mathbf{r}_i$ im Strömungsfeld $N-1$ translatierender Kugeln bei $\mathbf{r}_j$:

$$\mathbf{v}_i = \mu_0 \mathbf{F}_i + \mu_0 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(\frac{3}{4}\frac{a}{d}\left(\mathbb{1} + \frac{\mathbf{d}_{ji}\mathbf{d}_{ji}}{d^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^3 \left(\mathbb{1} - 3\frac{\mathbf{d}_{ji}\mathbf{d}_{ji}}{d^2}\right)\right) \cdot \mathbf{F}_j \,, \qquad (6.17)$$

wobei $\mathbf{d}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ und $d = |\mathbf{d}_{ji}|$.

S **Aufgabe 27 (5 Punkte):** *Pushmepullyou*

Pushmepullyou ist ein kräftefreier Schwimmer, welcher aus zwei verbundenen Kugeln mit Radien $a_1(t)$, $a_2(t)$ besteht. Eine Möglichkeit, eine nichtreziproke Schwimmbewegung zu bekommen, ist die im folgenden erläuterte Bewegung, wobei die Schwimmperiode T in vier Schritte $T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)}$ aufgeteilt wird:

Schritt (1): Bei konstantem Mittelpunktsabstand $r_{12} = D_1$ wird Volumen mit der konstanten Geschwindigkeit $W_1 = \dot{V}_1(t) = -\dot{V}_2(t) > 0$ für die Dauer $T^{(1)}$ von Kugel 2 auf Kugel 1 übertragen, wobei

$$(1) \qquad V = V_1(t) + V_2(t) = \frac{4\pi}{3}a_1^3(t) + \frac{4\pi}{3}a_2^3(t) = \text{const},$$

mit

$$(2) \quad V_1(T^{(1)}) = V_2(0),\ V_2(T^{(1)}) = V_1(0) \ \Leftrightarrow\ a_1(0) = a_2(T^{(1)}) \equiv a_\alpha, a_2(0) = a_1(T^{(1)}) \equiv a_\beta,$$

In erster Näherung bewegen sich die Kugeln kräftefrei jeweils im Strömungsfeld der anderen Kugel. Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 24 um die Geschwindigkeit $U^{(1)}$ des Schwimmermittelpunktes zu bestimmen. Wie lange ($T^{(1)}$) dauert das 'Pumpen'? Bestimmen Sie die Verschiebung des Schwimmermittelpunkts $\Delta x^{(1)}$.

Schritt (2): Nun wird der Abstand zwischen den Kugeln linear mit der konstanten Geschwindigkeit $W_2 > 0$ von D_1 auf D_2 erhöht. Welche Schwimmgeschwindigkeit $U^{(2)}$ und welche Verschiebung $\Delta x^{(2)}$ ergibt sich? Wie lange ($T^{(2)}$) dauert das 'Strecken'?
Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 23 c).

Schritt (3): Wie Schritt (1), aber $r_{12} = D_2$, $W_1 < 0$ und

$$(3) \qquad a_1(0) = a_2(T^{(3)}) \equiv a_\beta, a_2(0) = a_1(T^{(3)}) \equiv a_\alpha.$$

Berechnen Sie $U^{(3)}$, $T^{(3)}$ und $\Delta x^{(3)}$. Nun wird also Volumen von Kugel 1 zu Kugel 2 gepumpt.
Schritt (4): Wie Schritt (2), aber Verkürzung von D_2 auf D_1 mit $W_2 < 0$. Berechnen Sie $U^{(4)}$, $T^{(4)}$ und $\Delta x^{(4)}$.

Nehmen Sie nun an, dass $a_\beta = 4a_\alpha$, $D_1 = 16a_\alpha$, $D_2 = 80a_\alpha$ und berechnen Sie die totale Verschiebung $\Delta x = \Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)} + \Delta x^{(3)} + \Delta x^{(4)}$ während einer Periode T.

S **Aufgabe 28 (5 Punkte):** *Persistenzlänge*

(a) Sei $\mathbf{t}(s)$ der normierte Tangentialvektor eines Polymers an der Stelle s entlang der Polymerkontur. Zeigen Sie, dass (ohne Einfluss äußerer Kräfte) für die Korrelationsfunktion gilt

$$\langle \mathbf{t}(s_1) \cdot \mathbf{t}(s_2) \rangle = e^{-|s_1 - s_2|/A}\,, \tag{7.3}$$

wobei die Persistenzlänge A bzw. die Biegesteifigkeit $k_B T A$ definiert ist durch die elastische Energie

$$E = \frac{1}{2}\, k_B T A \int_0^{L_{\text{tot}}} ds \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right)^2$$

eines semiflexiblen Polymers mit konstanter Konturlänge L_{tot}.

(b) Bestimmen Sie den mittleren quadratischen End-zu-End-Abstand $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ eines semiflexiblen Polymers ohne äußere Kraft. Wie lässt sich das Modell des kontinuierlichen semiflexiblen Polymers auf das diskrete Kettenmodell aus Aufgabe 25 übertragen?