

Dr. Ermin Malic  
 Dr. Marten Richter  
 Dipl. Phys. Julia Kabuß

## 11. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I+II

**Abgabe: Di. 9.07.2013 vor Beginn der Vorlesung im EW 203**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

**Aufgabe 17 (10 Punkte): Power-Zienau-Woolley Transformation**

In dieser Aufgabe soll mithilfe der Power-Zienau-Woolley Transformation

$$(1) \quad U = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{d} \cdot \mathbf{A}\right] = \exp\left[\sum_k (\lambda_k c_k - \lambda_k^* c_k^\dagger)\right],$$

$$(2) \quad \text{wobei } \lambda_k = \frac{i\epsilon_k \cdot \mathbf{d}}{\sqrt{2\epsilon_0 \hbar \omega_k L^3}},$$

der Hamiltonian in der elektrischen Dipoldarstellung ( $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ ) aus dem Hamiltonian in der Coulomb Eichung für die Elektron-Licht Wechselwirkung ( $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ ) hergeleitet werden. Hier sind  $c_k$  und  $c_k^\dagger$  die photonischen Vernichter- und Erzeugeroperatoren und  $\mathbf{d} = \sum_j q_j \mathbf{r}_j$  das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung. Berechnen Sie dazu zunächst:

1.  $U \mathbf{r}_j U^\dagger$ ,
2.  $U \mathbf{p}_j U^\dagger$ ,
3.  $U c_k U^\dagger$  und  $U c_k^\dagger U^\dagger$ ,
4.  $U \mathbf{A}_\perp U^\dagger$ . In der Langwellennäherung ist der Hamiltonian in  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ -Kopplung gegeben durch:

$$(3) \quad H = \sum_j \frac{1}{2m_j} [\mathbf{p}_j - q_j \mathbf{A}_\perp(0)]^2 + V_{Coul}(\mathbf{r}_j) + \sum_k \hbar \omega_k (c_k^\dagger c_k + \frac{1}{2}).$$

5. Berechnen sie nun  $H' = U H U^\dagger$

**Aufgabe 18 (10 Punkte): Frenkel-Exzitonen**

Setzen Sie für die lokalisierten Exziton-Vernichter  $B_l = h_l a_l$  und Erzeuger  $B_l^\dagger \equiv a_l^\dagger h_l^\dagger$  (Ort  $l$ ) die Entwicklung

$$(4) \quad B_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}l} B_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad B_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}l} B_{\mathbf{k}}$$

an.

1. Zeigen Sie, dass für die Umkehrentwicklung gilt:  $B_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{i\mathbf{k}l} B_l^\dagger$ ,  $B_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{-i\mathbf{k}l} B_l$
2. Überführen Sie mithilfe von Gleichung (4) den Exziton Hamiltonian (Siehe VL und ÜB) in Diagonalgestalt:

$$(5) \quad H = \epsilon \sum_l B_l^\dagger B_l + \sum_{ll'} W(1 - l') B_l^\dagger B_{l'} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) B_{\mathbf{k}}^\dagger B_{\mathbf{k}}$$

3. Berechnen Sie die Kommutatorrelationen  $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}]_-$  und  $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^\dagger]_-$ . Unter welchen Bedingungen handelt es sich um eher bosonische Vertauschungsrelationen?