Prof. Dr. Tobias Brandes
Arash Azhand
Wassilij Kopylov
Christian Fräßdorf

8. Übungsblatt – Theoretischen Physik IV

Abgabe: Fr. 7. 06. 2013 bis 17:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 21 (12 Punkte): *Kohärente Zustände*

Sei $H = \sum_{i=1}^{N} H_i$ mit $H_i = \hbar\omega_i(a_i^\dagger a_i + 1/2)$ der Hamilton-Operator vom i-ten harmonischen Oszillator und $|n\rangle = |n_1 n_2 ... n_N\rangle$ die entsprechenden Fockzustände. Es gilt also $a_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1}\,|n_i + 1\rangle$ und $a\,|n_i\rangle = \sqrt{n_i}\,|n_i - 1\rangle$. Ein kohärenter Zustand $|\alpha_i\rangle$ ist der Eigenzustand vom Vernichtungsoperator a_i, d.h. $a_i\,|\alpha_i\rangle = \alpha_i\,|\alpha_i\rangle$.

1. Darstellung vom köherenten Zustand (hier betrachten wir ein festes i und lassen daher den Index i weg)
   (a) Zeigen Sie mithilfe des Ansatzes $|\alpha\rangle = \sum_n c_n\,|n\rangle$ und der Definition vom kohärenten Zustand, dass der $|\alpha\rangle$-Zustand in der Fock-Darstellung folgende Form hat:
   $$|\alpha\rangle = C \cdot \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \ .$$
   (b) Bestimmen Sie aus der Normierungsbedingung für $|\alpha\rangle$ die Konstante C zu $C = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$.
   (c) Wir führen nun die s.g. Bargmann-Notation ein. Der Bargmann-Zustand $||\alpha\rangle$ ist definiert durch $||\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger}\,|0\rangle$. Zeigen Sie, dass sich der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ dann durch $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\,||\alpha\rangle$ schreiben lässt.
2. Eigenschaften kohärenter Zustände (hier betrachten wir ein festes i und lassen daher den Index i weg)
   (a) Zeigen Sie folgende Relation $e^{\alpha^*\hat{a}}\,||\alpha\rangle = e^{\alpha^*\alpha}\,||\alpha\rangle$
   (b) Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ nicht orthonormal sind. Berechnen Sie hierfür $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$.
   (c) Zeigen Sie die Vollständigkeitsrelation $\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi}\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$. Hinweis: $d\alpha d\alpha^* = 2\,dRe(\alpha)\,dIm(\alpha)$.
   (d) Zeigen Sie, dass $e^{i\omega t a^\dagger a}\,||\alpha\rangle = \left||e^{i\omega t}\alpha\right\rangle$, der Zustand wird also rotiert. Gilt dann auch $e^{i\omega t a^\dagger a}\,|\alpha\rangle = |e^{i\omega t}\alpha\rangle$?
   (e) Zeigen Sie $\frac{\partial}{\partial\alpha}\,||\alpha\rangle = a^\dagger\,||\alpha\rangle$.
   (f) Zeigen Sie, dass die Spur SpA für einen Operator A folgende Form hat
   $$SpA = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi}\,\langle\alpha|\,A\,|\alpha\rangle = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi} e^{-\alpha\alpha^*}\,\langle\alpha||\,A\,||\alpha\rangle \ .$$
   Hinweis: Verwenden Sie dazu die Fockzustände sowie die Vollständigkeitsrelation.

Bitte die Rückseite beachten

3. Ein Anwendungsbeispiel - Die Boseverteilung

   (a) Berechnen Sie nun die kanonische Zustandssumme $Z_k = Spe^{-\beta H}$ von N nicht wechselwirkenden harmonischen Oszillatoren. Führen Sie dabei die Spur über

      i. die Fock-Zustände $|n\rangle$ aus

      ii. über die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle = |\alpha_1 ... \alpha_N\rangle$ aus und benutzen sie dabei die Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben.

   Sie sollten dann auf $Z_k = \prod_{k=1}^{N} \frac{e^{-\beta \frac{\hbar\omega_k}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}}$ kommen.

   (b) Bestimmen Sie nun mithilfe der freien Energie die mittlere Energie der Oszillatoren im Wäremebad der Temperatur T. Wie verhält sie sich für $T \approx 0$ und für $T \gg 0$?

   (c) Berechnen Sie die mittelere Anzahl von Quanten in der k-ten Mode,d.h. $\langle \hat{n}_k \rangle = Sp(\hat{n}_k \rho)$ mit $\rho = e^{-\beta H}/Z_k$ und $\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k$. Skizzieren Sie das Ergebnis als Funktion von β und interpretieren sie kurz. Hinweis: $\frac{\sum_i a_i e^{ba_i}}{\sum_i e^{ba_i}} = \partial_b \ln \sum_i e^{ba_i}$.

Aufgabe 22 (8 Punkte): *Bose-Einstein-Kondensation*

(a) Diskutieren Sie mögliche Werte des chemischen Potentials für die Fermi-Dirac und die Bose-Einstein Statistik $f^{F/B}(\varepsilon_k, T, \mu)$. Plotten Sie die Verteilungen für verschiedene Temperaturen, dabei sei μ =fest. Wie verändert sich die mittlere Teilchenzahl?

(b) Betrachten Sie ein dreidimensionales Gas von Bosonen der Dichte n. Die mittlere Teilchenzahl $\overline{N}$ läßt sich berechnen durch Summation über alle Einzelbesetzungswahrscheinlichkeiten f_k^B, d.h. $\overline{N} = \sum_{\mathbf{k}}^{\infty} f_k^B$ wobei k der Betrag des Wellenvektors $\mathbf{k}$ der Teilchen ist. Es gilt die Dispersionsrelation $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Überführen Sie die Summe in ein Integral der Form,

$$\overline{N} = V \int_0^\infty f^B(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon$$

und bestimmen Sie die dreidimensionale Zustandsdichte $D(\varepsilon)$ ($\overline{N}$ ist fest.)

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) die minimal mögliche Temperatur (bei $\mu = 0$). Diese ist die kritische Temperatur der Bose-Einstein Kondensation T_c.
(*Hinweis:* $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx \approx 2.612$)

(d) Berechnen Sie damit für $T < T_c$ die mittlere Teilchenzahl N'. Ergeben sich Widersprüche für ein abgeschlossenes System und was bedeutet das?

(e) Argumentieren Sie, warum bei sehr kleinen Temperaturen beim Übergang von der Summe zum Integral ein Fehler in der Rechnung aus (b) entsteht.

(f) Machen Sie den Ansatz $\overline{N}/V = \rho_0 + N'/V$, mit ρ_0 als der Dichte des Bose-Einstein-Kondensats. Erklären Sie, warum dieser Ansatz den gemachten Fehler korrigiert. Berechnen Sie den Anteil der kondensierten Materie $\frac{V\rho_0}{\overline{N}}$.

(g) Gibt es Bose-Einstein Kondensation bei 2D Gasen?

Prof. Dr. Tobias Brandes
Arash Azhand
Wassilij Kopylov
Christian Fräßdorf

Vorlesung:

Mi. um 12 Uhr – 14 Uhr in EW 203,
Fr. um 8 Uhr – 10 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Bestandene Klausur
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Tobias Brandes	Mo	13:00 – 14:00 Uhr	EW 744	23034
Arash Azhand	Do	15:00 – 16:00 Uhr	EW 627	27681
Wassilij Kopylov	Mi	15:00–16:00 Uhr	EW 705	22741
Christian Fräßdorf			EW 060	