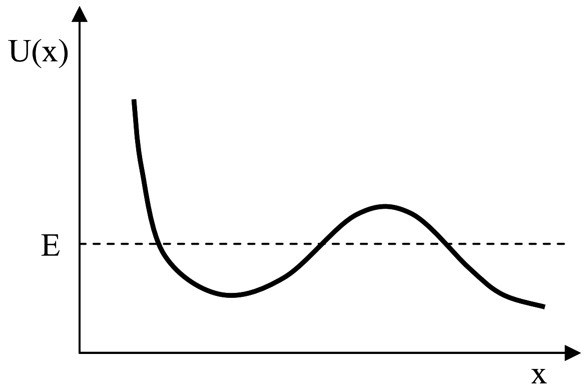
8. Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

8.1 Motivation

■ Eindimensionale (1d) Bewegung eines Teilchens (Masse m, keine Reibung) im Potenzial U(x)



klassisch: Ermittle die Bahnkurve/Trajektorie x(t) des Massepunkts (MP) aus der auf ihn wirkenden Kraft F(x) durch Lösung der Differentialgleichung

$$F\big(x(t)\big) = m\frac{d^2x(t)}{d\,t^2} = m\,\ddot{x}(t), \quad F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

"Integration der Newton´schen Bewegungsgleichung.

quantenmechanisch: Die stationäre Wellenfunktion ψ(x) genügt der Schrödinger-Gleichung

$$\left[\frac{\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2}{2m} + U(x)\right]\psi(x) = E\,\psi(x)$$

Auch das ist eine, in diesem Falle gewöhnliche, ODE für die im allgemeinen komplexe (also nicht messbare !) Funktion $\psi(x)$. Die statistische Interpretation von ψ(x) ψ*(x) dx als Wahrscheinlichkeit, das qm Objekt innerhalb des Intervalls (x + dx, x) anzutreffen (Max Born), löst dieses Problem (Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik).

8.2. Grundbegriffe und einfache Beispiele

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

ist die explizite Form einer ODE erster Ordnung.

Gesucht wird die Funktion y(x), die $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$ mit der **Anfangsbedingung** (AB) $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

Geometrisch:
Die Gesamtheit aller Tangenten in der x-y-Ebene definiert ein → **Richtungsfeld**. Die gesuchte Lösungskurve muss sich an dieses Richtungsfeld „anschmiegen" und den AB genügen.

• **Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen:** Satz von Cauchy

Eine wie auch immer gefundene oder erratene Lösung ist die für gegebene einzig existierende.

• Die **allgemeine Lösung** der ODE enthält unbestimmte Konstanten, die durch die AB festgelegt werden

• **grobe Klassifikation der Differentialgleichungen:**

- ODE oder PDE

- lineare DE: y und seine Ableitungen nur in der ersten Potenz. Beachte: Newton´sche Bewegungsgleichung und Schrödingergleichung sind lineare DG!
- nichtlineare DE: Mehrfachlösungen, Multistabilität, Stabilitätsanalyse, Lösungsverzweigung (Bifurkation), u.U. sensitive Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen, eingeschränkte Vorhersagbarkeit, deterministisches Chaos (Edward Lorenz, 1965; drei gekoppelte nichtlineare ODE 1. Ordnung)

Einfache Beispiele:

■ $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Da die rechte Seite nur von x abhängig ist, gilt

$$y(x) = \int^{x} dx'\, f(x') + \text{const} = y_0 + \int_{x_0}^{x} dx'\, f(x')$$

Die zunächst unbekannte Konstante wird durch eine Anfangsbedingung (AB)/einen vorgegebenen Anfangswert festgelegt, $y(x = x_0) = y_0$, und y(x) ist die **Stammfunktion** von f(x).

■ $\frac{dy}{dx} = h(x)\, g(y)$

Das ist eine separable ODE 1. Ordnung. Sie kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)\, dx \quad \to \text{ Integration } \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = H(x) - H(x_0)\,, \text{ AB: } \; y(x = x_0) = y_0\,.$$

Dabei ist H(x) die Stammfunktion von h(x), also $\frac{dH}{dx} = h(x)$, und die AB wurde bereits berücksichtigt.

8.3 Lineare ODE der Ordnung n

Schreibweisen

$$y^{(n)}(x)+f_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x)+f_1(x)\,y'(x)+f_0(x)\,y(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}=L_n\,y(x)=f(x),\quad (f_n(x)\equiv 1)$$

<u>Drei Sätze:</u>

1. Die homogene ODE n-ter Ordnung $L_n\,y(x) = 0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen $y_1(x)$, … , $y_n(x)$.

2. Die allgemeine Lösung der homogenen ODE $L_n\,y = 0$ lautet

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + \ldots + c_n\,y_n(x)$$

mit Konstanten c_i, die aus den Anfangsbedingungen $y(0)$, $y'(0)$, … , $y^{(n-1)}(0)$ bestimmt werden.
(Diskutiere Superpositionsprinzip, Grundgleichungen der Physik sind linear …)

3. Die allgemeine Lösung der inhomogenen ODE $L_n\,y(x)=f(x)$ ist

$y(x) = y_0(x) + c_1\,y_1(x) + \ldots + c_n\,y_n(x)$, wobei $y_0(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen ODE ist, also $L_n\,y_0 = f(x)$ gilt.

■ $x^2y''-2xy'+2y=0$

Das ist eine lineare, homogene ODE zweiter Ordnung ($L_2 = x^2\dfrac{d}{dx^2}-2x\dfrac{d}{dx}+2$).

Besonderheit: In jedem Term ist die Anzahl der x-Potenzen gleich Ordnung der Ableitung. Deshalb versuchen wir den Ansatz

$$y=x^{\lambda},\quad x^{\lambda}\left[\lambda(\lambda-1)-2\lambda+2\right]=0\ ,\quad \lambda^2-3\lambda+2=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2$$

Allgemeine Lösung: $y(x)=c_1\,x+c_2\,x^2$. Probe: selbst!

8.4 Lineare ODE erster Ordnung (Kapitel gleichzeitig Beispiel für Anwendung der Sätze (**1.** -**3.**)

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\; y + q(x) \quad \rightarrow \text{allgemeine, explizite Form}$$

1. Schritt: Bestimme die *allgemeine* Lösung der homogenen Gleichung, hier durch Trennung der Variablen. Wir erhalten

$$\frac{dy}{y} = p(x)\; dx\,,\;\; \ln y = \ln c + \int_{x_0}^{x} dz\, p(z)\;\; \text{, also}\;\; y(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} dz\, p(z)\right)$$

mit der *freien* Konstanten c. Diese wird aus der AB bestimmt, d.h.

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(z)\; dz\right),\;\; y(x = x_0) = y_0\,.$$

2. Schritt: Bestimme eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Im vorliegenden Fall geschieht dies durch Variation der Konstanten.

Lösungsansatz: $y(x) = c(x)\; \exp\left(\int^{x} p(z)\; dz\right)$

Einsetzen in $\frac{dy}{dx} = p(x)\; y + q(x)$ ergibt: $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} e^{\int^{x} \dots} + \underline{c\; p(x) e^{\int^{x} \dots}} = \underline{p(x)\; y(x)} + q(x)\,.$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc(x)}{dx} = q(x) e^{-\int^{x} \dots}\,.$$

Die letzte Gleichung ist unmittelbar integrierbar (rechte Seite hängt nur von x ab)

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} du\;\; q(u)\;\; \exp\left(-\int_{x_0}^{u} p(z)\;\; dz\right) + c(x_0)\,.$$

Also lautet die allgemeine Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(x = x_0) = y_0$

$$\underline{y(x) = y_0\, e^{P(x)} + \int_{x_0}^{x} q(z)\; e^{P(x)-P(z)}\, dz}\ ,$$

wobei $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(z)\, dz$ die Stammfunktion von p(x) ist. Damit haben wir die gesuchte Lösung durch gewöhnliche Integrale ausgedrückt, die ODE also gelöst, bzw. „integriert".

8.5 Lineare ODE zweiter Ordnung $\rightarrow$ TUTORIUM

8.6 Systeme linearer ODE mit konstanten Koeffizienten

Der Exponentialansatz funktioniert auch bei Systemen aus n gekoppelten linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{ik} y_k,\ \ \frac{d\underline{y}}{dx} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y},\ i,k = 1,2,\ldots,n. \qquad (a_{ik} \text{ seien reell, Summenkonvention})$$

Der **Exponentialansatz** $y_i(x) = C_i e^{\lambda x} \ \rightarrow\ (\lambda\,\delta_{ik} - a_{ik}) C_k = 0$

führt auf ein System aus n homogenen algebraischen Gleichungen für n unbekannte Konstanten C_k. Notwendig und hinreichend für nichttriviale Lösungen (nicht alle $C_k = 0$) ist:

$\mathrm{Det}(\lambda\,\delta_{ik} - a_{ik}) = 0 \ \rightarrow$ charakteristische Gleichung.

Polynom der Ordnung n in λ mit genau n Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (Gauß´scher Fundamentalsatz), den Eigenwerten (EW) der Matrix $\underline{\underline{A}}$. Die EW können komplex und zum Teil (oder ganz) einander gleich sein $\rightarrow$ Entartung.

Hat man n verschiedene EW λ_μ, erhält man die allgemeine Lösung des ODE Systems durch Überlagerung der $e^{\lambda_\mu x}$ $\mu = 1, 2, \dots , n$

$$y_i(x) = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \, C_i^\mu \, e^{\lambda_\mu x} \; .$$

Beachte: Eine homogene lineare ODE n-ter Ordnung ist äquivalent zu einem System aus n gekoppelten linearen ODE 1. Ordnung.