3. Vektoren

3.1 Definition, Einheitsvektoren, Komponenten, Rechenregeln, Vektorraum

Neben skalaren (Zahlen mit Maßeinheit wie Masse, Energie, Druck usw.) werden in der Physik vektorielle Größen ("Pfeile" mit Richtung und Länge) verwendet: Ortsvektor, Geschwindigkeit, Verschiebung, Kraft, Feldstärke usw.

■ Bahnkurve einer Kanonenkugel mit Ortsvektor, Momentangeschwindigkeit und Schwerkraft (Skizze V)

■ Verschiebungsvektor: $\underline{r}_1 + \underline{r}_{12} = \underline{r}_2$ (Skizze V)

Grafisch werden Vektoren durch frei verschiebbare Pfeile "von A nach B" veranschaulicht, Vektoren sind also Größen, die Betrag *und* Richtung besitzen.

Vereinbarung zur Schreibweise: Vektoren unterstrichen, $\underline{a}$, Betrag (Länge) des Vektors $\underline{a}$ ohne Unterstrich, $|\underline{a}| = a$.

Im dreidimensionalen Raum sind drei Zahlen (Betrag und zwei Winkel → sphärische Koordinaten r bzw. φ und θ; Skizze V) zur eindeutigen Bestimmung eines Vektors ausreichend. Im kartesischen *Koordinatensystem* werden die senkrechten Projektionen auf die Koordinatenachsen verwendet (Komponenten des Vektors):

$$x = r \cos\varphi \, \sin\theta,$$
$$y = r \sin\varphi \, \sin\theta,$$
$$z = r \cos\theta.$$

<u>Definition</u>: Vektoren im dreidimensionalen Raum sind *geordnete* Zahlentripel, die sich auf ein Koordinatensystem beziehen

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Bem.: *geordnete* Zahlentripel

Zahlentripel sind genau dann Vektoren, wenn sie sich bei Drehung des Koordinatensystems gemäß $\underline{a}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{a}$ transformieren ($\underline{\underline{D}}$ - Drehmatrix, vergleiche 4. Vorlesung).

Ein Zahlentripel aus Temperatur, Druck und Volumen eines Gases bildet beispielsweise keinen Vektor.

In der linearen Algebra werden Vektoren ohne Bezug auf ein Koordinatensystem ad hoc als (geordnetes) n-Tupel von Zahlen definiert, für die bestimmte Rechenregeln gelten.

Definition: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\underline{e}_i \in \Re^n$ oder C^n, d.h., die Zahlen a_i sind reell oder komplex.

Die Vektoren werden als Elemente eines, zunächst endlichdimensionalen, *Vektorraums* aufgefasst (vgl. Vorlesung Lineare Algebra).

• Komponentendarstellung von Vektoren

$\underline{a} = a_1\,\underline{e}_1 + a_2\,\underline{e}_2 + a_3\,\underline{e}_3$ *Komponentendarstellung* von $\underline{a}$ bzgl. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, und $\underline{e}_3$.

Für Vektoren sind die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl definiert: Vektoren werden addiert ("Kräfteparallelogramm, Addition ist kommutativ) und mit Zahlen multipliziert, indem man ihre Komponenten addiert bzw. mit Zahlen multipliziert.

• Einheitsvektoren (EHV) sind Vektoren vom Betrag (der Länge) 1: Für einen beliebigen Vektor $\underline{a}$ mit Betrag a ist

$$\underline{e} = \frac{1}{a}\underline{a}$$

der Einheitsvektor in Richtung von $\underline{a}$. Einheitsvektoren sind besonders gut zur Kennzeichnung von Richtungen geeignet. Im dreidimensionalen Raum lassen sich Koordinatensysteme bequem durch drei Einheitsvektoren

$$\underline{e}_x = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_y = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \underline{e}_z = \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

festlegen (Rechtssystem, Dreibein, Skizze V).
Aus der Vorlesung lineare Algebra die Begriffe lineare Unabhängigkeit von Vektoren, Basis und die Axiome des linearen Vektorraums wiederholen.

3.2 Produkte von Vektoren

Es gibt zwei physikalisch sinnvolle Möglichkeiten für einfache Vektorprodukte: das sogenannte *innere* und das *äußere* Produkt zweier Vektoren.

3.2.1 **Skalarprodukt** (inneres Produkt)

- Physikalische Motivation: Die bei Verschiebung eines Körpers K um $\underline{\Delta r}$ durch eine durch eine in seinem Schwerpunkt angreifende Kraft $\underline{F}$ verrichtete Arbeit ist proportional zu

$$\Delta A \sim \begin{cases} F \cos\varphi \\ \Delta r \end{cases}$$

(Kraft $\underline{F}$ zieht Körper K in Richtung $\underline{\Delta r}$, φ ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\underline{F}$ und $\underline{\Delta r}$, $F \cos\varphi$ ist also die senkrechte Projektion des Vektors $\underline{F}$ auf den Vektor $\underline{\Delta r}$, Skizze V) . Wir definieren

$\Delta A = F \Delta r \cos\varphi =: \underline{F} \cdot \underline{\Delta r}$, für infinitesimal kleine Verschiebung $\underline{dr}$ schreiben wir $dA = \underline{F} \cdot \underline{dr}$.

Allgemein ist das Skalarprodukt aus den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die Zahl

$$\underline{a} \cdot \underline{b} := a\, b_{\|} = a_{\|}\, b = a\, b \cos(\text{eingeschlossenen Winkels}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i , \quad \text{es gilt } \frac{b}{b_{\|}} = \frac{a}{a_{\|}} .$$

• Skalarprodukt in Komponentenschreibweise, Summenkonvention

Mit Hilfe der senkrecht aufeinander stehenden EHV in x, y und z-Richtung (kartesisches Koordinatensystem)

$$\underline{e}_x = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_y = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \underline{e}_z = \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

haben wir

$$\underline{a} = a_1\,\underline{e}_1 + a_2\,\underline{e}_2 + a_3\,\underline{e}_3\,,$$

also

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1\,\underline{e}_1 + a_2\,\underline{e}_2 + a_3\,\underline{e}_3) \cdot (b_1\,\underline{e}_1 + b_2\,\underline{e}_2 + b_3\,\underline{e}_3) = \ldots\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \ \ldots = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

Summenkonvention

Zur Vereinfachung der Schreibweise hat Einstein vorgeschlagen, über doppelt vorkommende Indices von 1 …. n zu summieren, ohne das Summenzeichen anzugeben:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i\,.$$

Bequem ist auch die Einführung des Kronecker-Symbols

$$\delta_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Dann haben wir statt der ganzen Schreiberei oben einfach

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i\,\underline{e}_i \cdot b_k\,\underline{e}_k = a_i b_k\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = a_i b_k\,\delta_{ik} = a_i b_i\,.$$

■ Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Relationen

$$\delta_{ii} = \delta_{nn} = 3\,, \quad \delta_{ij}\,\delta_{jk} = \delta_{ik}\,, \quad c_k\, a_i\, a_j\, b_k\, \delta_{ij} = a^2(\underline{c}\cdot\underline{b})\ .$$

• Weitere ausgewählte Eigenschaften des Skalarprodukts

- $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$, speziell gilt $\underline{e}\cdot\underline{e} = 1$ für alle EHV.

- Betrag, Norm, Länge des Vektors $\underline{a}$: $a \equiv |\underline{a}| := \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}} \overset{\text{im } R^3}{=} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- Orthogonalität: Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ heißen orthogonal, wenn $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$.

3.2.2 **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

- Physikalische Motivation: Geladenes Teilchen im Magnetfeld

Aus dem Experiment ergibt sich, das die auf das Teilchen wirkende → Lorentz-Kraft $\underline{F}_L$ betragsmäßig proportional zu

$$F_L \sim \begin{cases} q \\ v\,B_\perp = v_\perp B \end{cases}$$

(Skizze aus V)

und senkrecht zu beiden Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{B}$ gerichtet ist (senkrecht auf der von $\underline{v}$ und $\underline{B}$ aufgespannten Ebene steht; rechte Handregel üben). Dabei bezeichnen q die Ladung, $\underline{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens, $\underline{B}$ die magnetische Induktion und $\perp$ die Komponenten der Vektoren senkrecht zum jeweiligen Partner.

■ Weitere Beispiele:

Drehmoment $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$, Drehimpuls $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$.

- Allgemeine Definition des Vektorprodukts aus zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$:

$$\underline{a} \times \underline{b} = a\, b\, \sin(\text{des eingeschlossenen Winkels})\ \underline{e}\ .$$

(Skizze aus V)

Hier ist $\underline{e}$ der senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$ stehende EHV (Rechtssystem, rechte Hand Regel). Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich der Fläche des durch $\underline{a}$ und $\underline{b}$ definierten Parallelogramms

$$\left|\underline{a} \times \underline{b}\right| = a\, b \sin\varphi$$

(zeigen).

• Vektorprodukt in Komponentendarstellung

EINSCHUB: 4. Matrizen und Determinanden

Eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist ein Schema von $m \times n$ Zahlen a_{ij} bestehend aus $i = 1, 2, ..., n$ Zeilen und $j = 1, 2, ... , m$ Spalten

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \qquad \text{(Matrix "vom Typ } m \times n\text{")}$$

Im Folgenden seien die Matrixelemente a_{ij} reelle Zahlen sowie m und n endlich.

4.1 Rechenregeln

Gleichheit von zwei Matrizen: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i, j.

Summe zweier Matrizen gleichen Typs: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle i, j,

wobei $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \rightarrow$ Addition von Matrizen kommutativ.

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl: $\alpha\, \underline{\underline{A}} = (\alpha\, a_{ij})$ (alle Elemente mit α multiplizieren).

Die zu $\underline{\underline{A}}$ transponierte Matrix $\underline{\underline{A}}^T$ mit $a_{ij}^{\ T} = a_{ji}$ entsteht durch Vertauschung der Zeilen und Spalten von $\underline{\underline{A}}$.

Offensichtlich können Vektoren als Matrizen aufgefasst werden, z.B. im R^3

Spaltenvektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Zeilenvektor $\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$

4.2 Multiplikation von Matrizen

Sei $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ eine Matrix vom Typ $m_A \times n_A$ und $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ eine Matrix vom Typ $m_B \times n_B$.
Nur wenn $\underline{\underline{A}}$ genauso viele Spalten wie $\underline{\underline{B}}$ Zeilen hat ($n_A = m_B$), ist das Produkt beider Matrizen definiert, wobei gilt

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$ Summenkonvention!

Also werden paarweise die Elemente der i-ten Zeile von $\underline{\underline{A}}$ mit den Elementen der k-ten Spalte von $\underline{\underline{B}}$ multipliziert und addiert. M.a.W.: Das Matrixelement c_{ij} ist das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von $\underline{\underline{A}}$ und dem j-ten Spaltenvektor von $\underline{\underline{B}}$. Die Produktmatrix hat m_A Zeilen und n_B Spalten.

Im Gegensatz zur Addition ist die Multiplikation von Matrizen i.a. <u>nicht</u> kommutativ!

■ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = (3+8) = \underbrace{(11)}_{1\times 1-\text{Matrix}}$, $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times 2-\text{Matrix}}$

Für nichtquadratische Matrizen verhindert oft schon die Bedingung $n_A \neq n_B$ die Vertauschbarkeit. Dennoch kommutieren auch quadratische Matrizen i.a. nicht.

■ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Da multiplikativ vertauschbare Matrizen etwas Besonderes sind, definiert man:

Def.: Die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ heißen vertauschbar (kommutieren), wenn

$$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] := \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = 0$$

gilt.

- Potenzen $\underline{\underline{A}}^2, \ldots, \underline{\underline{A}}^n$ können nur für quadratische Matrizen $\underline{\underline{A}}$ gebildet werden. Dabei gilt

$$\underline{\underline{A}}^2 := \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = (a_{ik} a_{kj}), \; e^{\underline{\underline{A}}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{\underline{A}}^n \text{ usw. (Beachte: } \frac{d}{dt} e^{\underline{\underline{A}}t} = \underline{\underline{A}} e^{\underline{\underline{A}}t} \text{)}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren lässt sich als Matrixmultiplikation darstellen, z.B.

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{A}}, \; \underline{b} = (b_1, b_2, b_3) = \underline{\underline{B}}, \; \underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^T = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}} .$$

4.3 Determinante einer quadratischen $n \times n$ - Matrix

Determinante der quadratischen Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist die Zahl

$$\text{Def.: } \operatorname{Det}(\underline{\underline{A}}) \equiv \left|\underline{\underline{A}}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} - / + \ldots a_{1n} A_{1n}$$

mit den Unterdeterminanten A_{ik} . A_{ik} ist die Determinante n-1 ten Grades, die aus der Determinante von $\underline{\underline{A}}$ durch Streichung ihrer i-ten Zeile und ihrer k-ten Spalte entsteht. Diese rekursive Definition führt die eine Determinante n-ten Grades auf eine Summe von Determinanten n-1 -ten Grades zurückführt. Falls n = 1, ist die Determinante das Matrixelement selbst.

■ Nach dieser Definition berechnet sich z.B. die Determinante einer quadratischen Matrix 3-ten Grades wie folgt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Für derartige Determinanten 3. Ordnung (und nur für diese!) ist die häufig verwendete Sarrus´sche Regel gültig:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Terme mit positivem (negativem) Vorzeichen entstehen aus dem wie oben erweiterten Schema durch Produktbildung entlang und parallel zur Haupt- (Neben-) Diagonalen (durchgezogene bzw. unterbrochene Linien), man verifiziert leicht das obige Ergebnis.

ZURÜCK ZU KAPITEL 3:

- Vektorprodukt in Komponentendarstellung

Das Vektorprodukt von $\underline{a}$, $\underline{b} \in R^3$ ist der Vektor (Komponentendarstellung)

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \underline{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \underline{e}_1 \, (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{e}_2 \, (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{e}_3 \, (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Beachte, dass $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ gilt.

Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise können wir das ε- oder *Levi-Civita-Symbol* verwenden

$$\varepsilon_{ijk} := \underline{e}_i \cdot \left(\underline{e}_j \times \underline{e}_k \right) = \begin{cases} +1, \text{ wenn } i, j, k \text{ zyklisch zu } 1,2,3 \quad (123,\, 231,\, 312) \\ -1, \text{ wenn } i, j, k \text{ antizyklisch zu } 1,2,3 \quad (213,\, 132,\, 321) \\ \;\; 0, \text{ ansonsten (z.B. mindesten zwei gleiche Indices)} \end{cases} .$$

Man findet dann

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \sum_{i,j,k}^{3} \varepsilon_{ijk} \, a_i \, b_j \, \underline{e}_k = \varepsilon_{ijk} \, a_i \, b_j \, \underline{e}_k \quad \text{oder} \quad c_i = (\underline{a} \times \underline{b})_i = \varepsilon_{ijk} \, a_j \, b_k$$